É claro que nas expressões (1)

$$C\,c = \sum_{i=1}^{k} C_i\,c_i$$

sendo k o número de máquinas concentradoras.

Teremos, é claro, tantos valores de m quantos os minérios úteis aproveitados, no nosso caso particular dois valores de m correspondentes à cassiterite e à volframite.

Como para obter os teores das diferentes classes de mistura mineral no circuito da lavaria não podemos analisar todo o material que constitue essa classe, procura-se obter uma pequena porção ou *amostra* representativa da classe cuja riqueza se pretende determinar. Os resultados que desejamos conhecer obtêm-se em função das percentagens fornecidas pelas dosagens químicas das amostras colhidas, portanto, a escolha de amostras, sua quantidade e freqüência, constitue a base do nosso ensaio e requere todo o cuidado a-fim-de chegarmos a conclusões reais.

Tanto na recolha de amostras como na redução sucessiva do seu volume inicial estamos sujeitos a praticar inúmeros erros impossíveis de evitar ou de controlar. Todavia, em primeiro lugar, êsses erros possuem dois sentidos — por excesso ou por diferença — ambos de igual probabilidade, portanto, há uma certa probabilidade de se verificar a sua compensação, em segundo lugar, se aumentarmos a freqüência das amostragens e a duração dos períodos durante os quais elas se realizam, obtendo-se por média aritmética os valores referentes à unidade de tempo (no nosso caso o dia de trabalho) se diminuirmos o calibre das amostras de cada vez que pretendermos diminuir o seu volume e esta diminuïção fôr racionalmente executada, é evidente que devemos aumentar extraordinàriamente a probabilidade de compensação dos erros e diminuir a amplitude do êrro final. Chegamos desta forma a uma pequena amostra sôbre a qual se efectua uma dosagem química, é lícito tomar o resultado desta dosagem como valor médio do teor de minério útil da mistura mineral. Quer dizer, na determinação do rigor dos resultados considera-se o valor numérico da dosagem como correspondente ao teor da mistura mineral respectiva, isto é, despreza-se o êrro que possa ter-se cometido na amostragem.

Notemos que o nosso minério é relativamente sêco o que facilita o trabalho de amostragem e de pesagem.

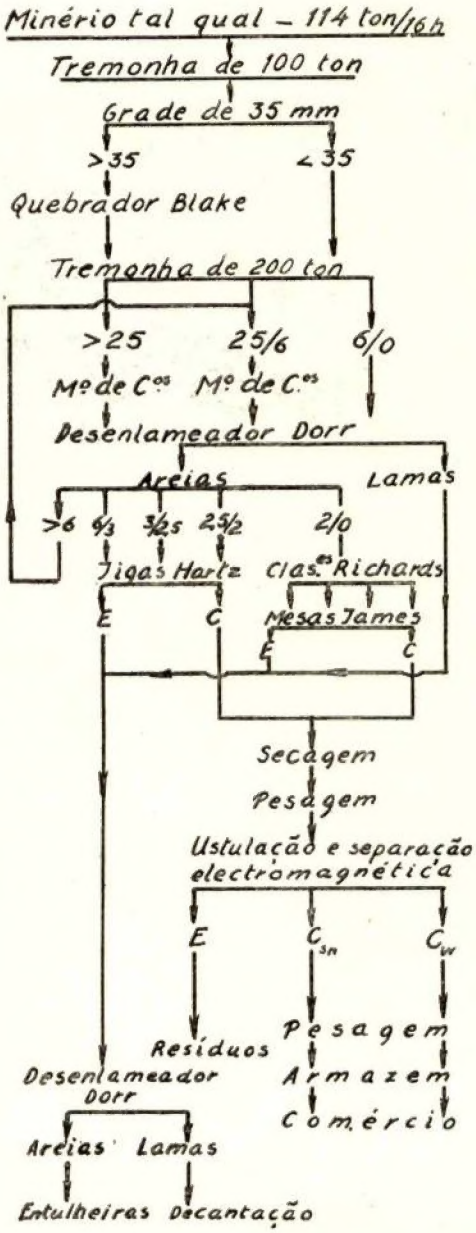


Fig. 4 – Diagrama Geral do tratamento mecânico.

1.º) Minério tal e qual.

Não vamos, é claro, fazer a amostragem do minério tal qual directamente no arranque

mas depois de efectuada a operação de quebragem, quando o minério se encontra mais fragmentado e misturado. Escolhemos para êsse fim a corrente de minério à saída do canal oscilante imediatamente após o quebrador. Com os meios precários de que dispunhamos vamos descrever os cuidados postos em prática: de 20 em 20 minutos um operário recolhia uma pasada de minérios que deitava em caixas de madeira expressamente construídas de $(0{,}5 \times 0{,}5 \times \times 0{,}3)$ m^3 de capacidade. No intervalo da recolha de amostras o operário pisava o minério em virtude de não existir qualquer quebrador ou moinho de laboratório. Tomaram-se disposições para não perder minério.

Ao fim de cada dia de trabalho obtinha-se uma caixa aproximadamente cheia, de calibe até o máximo de 1,5 cm. Despejava-se no piso cimentado e limpo de um recinto fechado reservado para as operações de amostragem obtendo-se um monte de minério que era baldeado e quartado cuidadosa e sucessivamente. O minério resultante era triturado mais uma vez até passar completamente por um crivo de malha metálica de 2 mm expressamente construído. O minério obtido era de novo quartado e baldeado até caber numa caixa de madeira — expressamente construída como tôdas as empregadas — de dimensões $(0{,}12 \times 0{,}22 \times 0{,}25)$ cm^3.

As 6 amostras assim obtidas durante a semana de amostragem foram bem trituradas, baldeadas e quartadas até ficarem reduzidas a 20 kg, rigorosamente pesados. Esta amostra foi lavada, do concentrado obtido extraíram-se amostras enviadas para o laboratório químico.

Com cuidados semelhantes tiraram-se amostras de

2.º) Concentrado das jigas;
3.º) Concentrado das mesas;
4.º) Estéril das jigas;
5.º) Estéril das mesas;
6.º) Lamas.

IV — Precisão de valores numéricos atribuídos aos pesos de concentrado e estéril

1) *Valor de A*

Determinámos 1,6 para pêso específico do tal qual. As vagonetas tipo «skipp» que alimentam a lavaria medem 0,5 m^3 transportando em cada viagem

$$0{,}5\ m^3 \times 1{,}6\ ton/m^3 = 0{,}8\ ton$$

As vagonetas contam-se diàriamente e supomos não ter havido engano nesta contagem. Consideremos um êrro equivalente a uma vagoneta [1] por dia proveniente delas não possuírem tôdas o mesmo pêso. O êrro cometido no fim dos 6 dias de amostragem será de

$$0{,}8/\sqrt{6} = 0{,}8/2{,}4 = 0{,}33 \approx 1/3\ ton$$

2) *Valor de C*

Tanto o concentrado das assentadeiras como o das mesas é diàriamente secado e pesado. Consideremos o êrro cometido inferior a 0,250 kg [1]. Para valor médio teremos

$$\frac{0{,}250}{\sqrt{6}} = 0{,}100\ kg$$

3) *Valor de B*

O pêso de estéril vamos obtê-lo por diferença

$$B = A - C$$

e como o êrro cometido na pesagem do concentrado é desprezível em relação ao êrro cometido na avaliação da pesagem da alimentação, segundo o critério da teoria dos erros, podemos dizer que o êrro cometido na avaliação do pêso de estéril não será superior ao cometido na avaliação do pêso do tal qual.

V — Movimento geral da lavaria durante os seis dias de amostragem

1.º — Minério em depósito no início e no fim da amostragem:

a) início da amostragem

torba I — vazia
torba II — 45 toneladas

[1] Verificou-se que êste êrro era inferior.

b) fim da amostragem

torba I — vazia
torba II — 80 toneladas

c) portanto, ao pêso total de tal qual transportado para a lavaria durante os seis dias de amostragem devemos descontar 35 ton. que não foi tratado.

2.º — Alimentação de minério tal qual

QUADRO I

Dia	N.º de vagonetas	Pêso em toneladas	Êrro máximo
1.º	170	136,0	± 0,8 ton.
2.º	128	102,4	
3.º	134	107,2	
4.º	167	133,6	
5.º	184	147,2	
6.º	115	92,0	
Total	898	718,4	—
Média	150	114	± 1/3 ton.

Logo

$$A = \frac{718{,}4 - 35{,}0}{6} \text{ ton.} \pm \frac{0{,}8}{\sqrt{6}} \text{ ton.}$$

$$= 114 \text{ ton.} \pm 1/3 \text{ ton.}$$

3.º — *Produção de concentrado*

QUADRO II

Dia	Conc. das jigas em kg — C_a	Conc. das mesas em kg — Cm	Êrro máximo
1.º	466	385	± 0,250
2.º	401	402	
3.º	248	280	
4.º	206	187	
5.º	228	201	
6.º	253	228	
Média	1802	1683	—
Total	300,3	280,5	± 0,100

Logo $C_a = 300{,}3 \text{ kg} \pm 0{,}1 \text{ kg}$
$C_m = 280{,}5 \text{ kg} \pm 0{,}1 \text{ kg}$

4.º — *Produção de estéril*

$$B = A - C$$
$$= 113{,}4 \text{ ton.} \pm 1/3 \text{ ton.}$$

VI — Teores de minério útil das amostras

QUADRO III

Amostra	Símbolo	Sn %	WO_3 %
Tal qual	a	0,223	0,133
Conc. das jigas	c_j	32	21
Conc. das mesas	c_m	31	19
Est. das jigas	b_j	0,07	0,015
Est. das mesas	b_m	0,01	0,009
Lamas	b_a	0,10	0,060

Em virtude do que dissemos anteriormente, podemos considerar a precisão dêstes valores da seguinte forma.

1.º — Minério tal qual.

Numa análise química temos erros provenientes da sua condução e das pesagens. Só a estas últimas podemos atribuir um valor numérico.

Com a balança de precisão normal cometem-se erros inferiores a 0,0001 gr mas por determinadas razões vamos supor que se pratica, *em cada pesagem*, um êrro inferior a 0,0005 gr e que iniciamos a análise com uma toma de 1,000 gr de minério. Como o concentrado de 20 kg de tal qual é inferior a 100 gr e como praticamos um êrro inferior a 0,0005 gr ao pesar a toma de minério de 1 gr e um êrro inferior a 0,0005 gr ao pesar WO_3 obtido (no caso do Sn o êrro é ainda menor) o êrro é inferior a 0,001 gr ou seja, inferior a 0,1 % (todavia as análises dos concentrados fornecem apenas números inteiros). Suponhamos que a nossa razão de concentração para obter o concentrado dos 20 kg (alínea primeira do parágrafo III) foi de 1/100. Nestas condições, em relação ao tal qual, a análise química comete um êrro inferior a 0,0001 % isto é, obtemos um resultado certo até a 3.ª casa decimal.

2.º — Concentrados.

Foram-nos fornecidos os resultados unitários (êrro inferior a 0,5 %) podendo todavia obter-se valores até a 1.ª casa decimal.

3.º — Estéril.
Caso semelhante ao do tal qual.

VII — Efeito útil da Lavaria

A) *Estanho.*

$$m = \frac{C\,c}{A\,a}\,100\,\% = \frac{C_j\,c_j + C_n\,c_n}{A\,a}\,100\,\%$$

$$= \frac{300{,}3 \times 32 + 280{,}5 \times 31}{113.900 \times 0{,}223}\,100\,\%$$

$m = 72\,\% \rightarrow$ efeito útil geral de lavaria

$p = 28\,\% \rightarrow$ perda geral em todos os estéreis

Calculemos a precisão dêste valor:

$$C = C_j + C_m = 580{,}8 \text{ kg} \pm 0{,}200$$

$$C\,c = C_j\,c_j + C_m\,c_m$$

onde

$$c = \frac{C_a\,c_a + C_m\,c_m}{C} = 31{,}5\,\% \pm 0{,}5$$

Em virtude da precisão que vimos para os outros valores temos que o valor de *m* está compreendido entre

$$\frac{580{,}6 \times 31}{114.200 \times 0{,}223}\,100 < m < \frac{581{,}0 \times 32}{113.600 \times 0{,}223}\,100$$

ou

$$71 < m < 73$$

isto é, o êrro cometido é inferior a 1 unidade, notando que só nos interessam para valores de *m* os números inteiros. Logo, o efeito útil geral da Lavaria é de 72 % com um êrro possível inferior a 1 % — e notemos que nesta hipótese é mínima a probabilidade de se conjugarem tôdas as condições mais desfavoráveis.

Efeitos úteis parciais:

Assentadeiras ou jigas

$$m_j = \frac{C_j\,c_j}{C_j\,c_j + B_j\,b_j}\,100 = 81\,\%$$

Mesas

$$m_m = \frac{C_m\,c_m}{C_m\,c_m + B_m\,b_m}\,100 = 96\,\%$$

B) *Volfrâmio.*

1 — *Efeito útil geral:*

$$m = \frac{C\,c}{A\,a}\,100$$

$$= \frac{300{,}3 \times 21 + 280{,}5 \times 19}{113.900 \times 0{,}153}\,100$$

$m = 77\,\%$

$p = 23\,\%$

Verifica-se da mesma forma que o êrro cometido é inferior a 1 %.

2 — *Efeitos úteis parciais:*

Assentadeiras ou jigas

$$m_j = 93\,\%$$

Mesas

$$m_m = 95\,\%$$

VIII — Distribuïção do minério e estéril pelo circuito da Lavaria

Segundo a nomenclatura empregada, podemos estabelecer o seguinte sistema de equações necessàriamente compatível [1].

$$\begin{cases} B = B_j + B_m + B_d \\ B_s\,b = B_j\,b_{js} + B_m\,b_{ms} + B_d\,b_{ds} \\ B_w\,b_w = B_a\,b_{aw} + B_m\,b_{mw} + B_d\,b_{dw} \end{cases}$$

Onde as letras e índices têm a significação já indicada, *s* refere-se ao estanho e *w* ao volfrâmio.

$$B = 113.900 - 580 \simeq 113.400$$

$$B_s\,b_s = Aa - (C_a\,c_a + C_m\,c_m) = 7094{,}6$$

$$B_w\,b_w = 3512{,}9$$

$$B_j = ?$$

$$B_m = ?$$

$$B_d = ?$$

---

[1] V. ob. cit.

Resolvido êste sistema, obtemos o quadro seguinte:

QUADRO IV

$B_j = 31.620$ kg	$A_j = 32$ ton/16 h
$B_m = 86.631$ »	$A_m = 37$ ton/16 h
$B_d = 45.149$ »	$A_d = 45$ ton/16 h

quantidades de mistura mineral trabalhadas em cada dia pelas jigas e mesas e de lamas separadas pelo desenlameador. As quantidades de estéril correspondem à verdade mas os valores numéricos da alimentação são ligeiramente superiores em virtude das máquinas trabalharem em circuito fechado.

IX — Distribuïção das perdas pelo circuito da lavaria

O efeito útil geral da lavaria dá-nos o *rendimento complexivo* de tôdas as máquinas concentradoras no que se refere à extracção do minério útil do tal qual. Do minério útil existente na alimentação perde-se, no nosso caso,

para o Sn → $p_s = (100 - m) = 28\ \%$

para o WO_3 → $p_w = (100 - m) = 23\ \%$

cuja distribuïção pelos diferentes estéreis interessa conhecer e que podemos calcular pela expressão

$$p = \frac{B\,b}{A\,a}\,100\ \%$$

ou por diferença com os efeitos úteis parciais. Obtém-se

QUADRO V

p	Sn %	WO_3 %
p_j	8,7	3,1
p_m	1,5	2,1
p_d	17,8	17,8
m	72,0	77,0
Soma	100,0	100,0

sendo p_j, p_m e p_p as perdas de minério, respectivamente, no estéril das assentadeiras ou jigas, das mesas e nas lamas abandonados pelo desenlameador.

X — Comparação entre a carga e a capacidade das máquinas e perdas respectivas

QUADRO VI

Máquinas	Origem da informação	Capacidade ton/16 h	Carga ton/16 h	Perda %	
				Sn	WO_3
Jigas	Univ. de Freiberg	55	32	8,7	3,1
Mesas	Kögler	26	37	1,5	2,1
Desenlameador	Richards and Locke	200	45	17,8	17,8

Nota:—Já num parágrafo anterior fizémos considerações sôbre êstes valores.

XI — Conclusões

Vemos pelo quadro VI que as mesas se encontram sobrecarregadas originando todavia uma perda em Sn e WO_3 de, respectivamente, 1,5 % e 2,1 %; se aumentarmos o número de mesas em conformidade com a carga de mistura mineral a tratar esta perda diminui mas tomemos êstes valores como base do cálculo seguinte:

Se moermos o estéril das jigas e o lavarmos nas mesas diminuìremos as perdas em Sn e WO_3, respectivamente, de $8,7 - 1,5 = 7,2$ % e $3,1 - 2,1 = 1,0$ %.

Se aproveitarmos as lamas (segundo Richards as mesas podem trabalhar material de calibre até 0,06 mm) e se recuperarmos 70 % do minério que nelas se perde (o efeito útil geral da lavaria é superior a êste valor) diminuìremos as perdas de Sn e de WO_3 de, respectivamente, 10,9 % e 10,3 %.

Na totalidade, recuperamos 18,1 % de Sn e 11,3 % de WO_3 o que equivale a uma lavaria com os efeitos úteis gerais de 81,9 % e 88,7 % digamos, 81 % e 88 %.

Nestas condições, recuperariamos 9 %

de Sn perdido e 11 % de WO_3 perdido, o que equivale em unidades de pêso a

$$114000 \times \frac{0{,}223}{100} \times \frac{9}{100} = 22{,}8 \text{ kg de Sn}$$

$$114000 \times \frac{0{,}133}{100} \times \frac{11}{100} = 16{,}6 \text{ kg de } WO_3$$

respectiva e aproximadamente

28 kg de cassiterite pura
21 kg de volframite pura

por cada dia de trabalho.

Êste aumento da produção traduz-se em escudos e as modificações propostas só serão viáveis se os encargos correspondentes forem contrabalançados pelo aumento dos lucros no tratamento mecânico. Podemos prever:

1 — Moer e concentrar o estéril das jigas. Poderia utilizar-se, por exemplo, um moínho de bolas com a capacidade de 35 toneladas (Vêr Quadro IV).

2 — Aproveitamento das lamas para o que seria de aconselhar a montagem de um espessador juntamente com uma decantação prévia.

3 — Montagem de mais mesas de lavagem.

Introduzidas estas modificações, um novo ensaio de amostragem indicaria a melhoria obtida na extracção do minério tal qual.

Agosto de 1942.

Cálculo operacional de Heaviside aplicado à teoria geral dos circuitos eléctricos

PELO ENG.º ELECTROTÉCNICO (U. P.) M. M. FERNANDES VIANA

Introdução

O cálculo operacional é, fundamentalmente, um ramo da análise matemática e, por isso, pode ser exposto abstractamente sem recurso a quaisquer interpretações físicas.

Oliver Heaviside, seu criador, tornou-o, automàticamente, num processo de análise, extraordinàriamente poderoso, da teoria dos circuitos e, por essa razão, julgamos mais conveniente tratar o assunto de maneira concreta dentro dum capítulo da Electrodinâmica onde a sua aplicação se fêz, não só intensivamente, como também com mais proveito.

Os processos matemáticos utilizados por Oliver Heaviside não eram, todavia, suficientemente rigorosos; por êsse motivo, alguns matemáticos e físicos como Carson, Bromwich, Wagner, Van der Poll e Doetsch modificaram as demonstrações e os métodos de cálculo, ajustando-os a maior rigor.

Os métodos operacionais resolvem problemas que, na maioria dos casos, o podem ser por outros métodos da Análise; porém, enquanto os métodos clássicos fornecem uma solução demasiado geral para o problema em questão, que depois as condições físicas vão concretizar, os métodos operacionais, tomando inicialmente em conta essas condições físicas, fornecem imediatamente a solução particular que êsse problema exige. É isso que, segundo nos parece, justifica o estudo concreto do cálculo operacional e, porque é nos circuitos eléctricos que a sua aplicação se tornou mais preponderante, é que julgamos mais conveniente tratá-lo em paralelo com a teoria dos circuitos.

Comecemos, pois, por definir circuito, de maneira a tornar-se mais manejável a idéia corrente, que é costume usar-se. Para isso, chamaremos circuito a uma entidade física em que as grandezas que nêle intervêm, são suficientemente determinadas, não só em função do tempo, como também em função duma única dimensão. Vê-se que esta definição não engloba ùnicamente os circuitos eléctricos, mas também sistemas físicos de natureza diferente, particularmente os circuitos mecânicos, acústicos, térmicos, hidráulicos, etc. Trataremos especialmente dos circuitos eléctricos, pois que estes têm muito mais importância, e concluiremos êste trabalho por um estudo comparado com os outros circuitos, identificando-os com circuitos eléctricos equivalentes.

A noção de circuito, assim definida, distingue-se da noção de campo, pois que nesta intervém, além do tempo, mais de uma dimensão. O cálculo operacional também tem utilidade na teoria dos campos e nós mostraremos, com alguns problemas de electromagnetismo, algumas aplicações neste domínio.

Chamaremos rêde a um conjunto de circuitos inter-relacionados de forma a exercerem entre si acções recíprocas. É óbvio, que uma rêde não é forçosamente constituída por circuitos da mesma natureza e pode ser constituída por circuitos simples de natureza diversa. Por exemplo, um alto-falante possui um circuito eléctrico, um circuito mecânico e até um campo acústico. Normalmente, desde que se possam considerar os circuitos de natureza não eléctrica como circuitos eléctricos equivalentes, não há perda de generalidade em tratar ùnicamente rêdes, essencialmente constituídas por circuitos eléctricos simples.

Uma rêde terá um número de graus de liberdade igual ao de variáveis independentes, necessárias para definir o seu comportamento, e êste número corresponderá ao de circuitos simples independentes, que compõem a rêde, e aos quais chamaremos malhas.

Um circuito, e portanto uma rêde, é determinado fìsicamente, quanto à sua natureza, por determinadas grandezas a que chamaremos parâmetros característicos. Por exemplo, um circuito oscilante simples tem como parâmetros característicos um condensador, uma auto-indução e uma resistência. Convém observar que os parâmetros característicos podem encontrar-se concentrados em pontos determinados do circuito ou distribuídos ao longo dêste, segundo uma lei determinada. É um caso típico dum circuito com parâmetros distribuídos uma linha telefónica onde, em cada ponto, existe um elemento de auto-indução e uma capacidade elementar. Esta distinção dos parâmetros é fundamental porque, enquanto uma rêde com parâmetros concentrados, conduz a um sistema de equações diferenciais e o resultado é apenas função do tempo, isto é, constante em um tempo determinado em todos os pontos dum circuito, no caso dum circuito com parâmetros distribuídos, há necessidade de resolver equações às derivadas parciais com um resultado não só dependente do tempo, como também da posição. Deve notar se, todavia, que os circuitos de parâmetros concentrados não têm existência real e, só mediante hipóteses simplificadoras, é que se podem considerar como tal. Além disso, também é freqüente aparecerem circuitos em que certos parâmetros são tomados como distribuídos e outros como concentrados. Como exemplo, uma bobina de auto-indução, que em baixa freqüência se pode tomar como um parâmetro concentrado com uma grande aproximação, deve, para freqüências muito elevadas, cujo comprimento de onda é da ordem de grandeza do comprimento da bobine, ser considerada como um parâmetro característico distribuído. Isto prova que a natureza dum parâmetro pode modificar-se, num determinado circuito, conforme o tipo de excitação a que se encontra submetido.

Uma outra classificação dos parâmetros, de fundamental importância nos circuitos, é a sua divisão em parâmetros constantes e parâmetros variáveis. Os primeiros conduzem a equações lineares de coeficientes constantes ou a equações às derivadas parciais lineares e os segundos a equações diferenciais lineares de coeficientes variáveis e até a equações diferenciais ou às derivadas parciais não lineares. Muitas vezes, os circuitos de parâmetros variáveis são mais fàcilmente analizados debaixo da forma de equações integrais. Os parâmetros característicos variáveis podem depender de tempo, dando assim origem a equações lineares de coeficiente não constantes, mas podem depender também da própria grandeza física que se tem em vista determinar e até serem função de estados anteriores ao instante considerado, isto é, da própria história do comportamento do circuito. Alguns exemplos, tirados dos circuitos eléctricos mais correntes, demonstram o que dissemos. Assim, por exemplo, a indução mútua entre o rotor e o estator duma máquina assíncrona é função do tempo, a resistência dum arco eléctrico é função da própria corrente que o atravessa, uma bobina com núcleo de ferro, devido à histerésis, depende dos valores porque a corrente passou antes do instante considerado.

Estudo dos circuitos de parâmetros constantes e concentrados

1 — *Relação entre as equações de Lagrange e as equações de Maxwell*

Recordemos que, no estudo da Mecânica Analítica, as equações de Lagrange, relativas a um sistema mecânico com p graus de liberdade dependendo das variáveis $q_1, q_2 \ldots q_p$, denominadas coordenadas generalizadas do sistema, são:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q'_i}{\partial L}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Theta_i \qquad i = (1,2\ldots p) \qquad L = T - W,$$

em que os q'_i são as velocidades generalizadas, L é a função de Lagrange, que é igual à fôrça viva do sistema T subtraída da energia potencial W do sistema para as fôrças conservativas e os Θ_i são as fôrças generalizadas, correspondentes às coordenadas q_i, que não são conservativas.

Consideremos, paralelamente a êste sistema mecânico, uma rêde de circuitos eléctricos com n nós ligados entre si por m ramais. A primeira lei de Kircchoff dá $n - 1$ relações para as m correntes que circulam nos ramais e, por conseqüência, restam $m - (n - 1) = p$ equações, as quais têm de ser estabelecidas a partir de p circuitos distintos que serão fornecidos pela 2.ª lei de Kircchoff. Numeremos êsses circuitos de 1 a p e atribuamos, a cada um dêles, uma corrente, a que chamaremos corrente própria do circuito. Como a corrente, num determinado ramal, é igual à soma algébrica das correntes próprias dos dois circuitos, de que o ramal faz parte, determinadas as correntes próprias dos circuitos, ficam conhecidas as correntes em cada ramal. Por outro lado, é fácil provar que, nestas condições, a segunda lei de Kircchoff determina, quando aplicada aos p circuitos distintos, as p correntes próprias, ficando por isso completamente estabelecidos os valores das correntes em cada ramal. Com efeito, representando por L_{ii} a auto-indução total, por R_{ii} a resistência total e por C_{ii} a capacidade total no circuito i e ainda por L_{ij}; R_{ij}, C_{ij} os valores que correspondem simultâneamente aos circuitos i e j, vê-se imediatamente que a equação:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} \sum_j L_{ij} I_j + \sum_j R_{ij} I_j + \sum_j \frac{Q_i}{C_{ij}} = E_i \qquad \begin{array}{l} L_{ij} = L_{ji} \\ R_{ij} = R_{ji} \\ C_{ij} = C_{ji} \end{array}$$

em que os I_j representam a corrente própria e os Q_j as cargas, que as capacidades C_{ij} adquirem devido à corrente I_i, conduzem à equação de Kircchoff aplicada ao mesmo circuito quando se consideram as correntes de cada ramal, pois que:

$$I_i + I_j = i_{ij} \qquad Q_i + Q_j = q_{ij} \qquad (\sum_j) L_{ij} + l_{ii} = L_{ii} \qquad (\sum_j) \frac{1}{C'_{ij}} + \frac{1}{c_{ii}} = \frac{1}{C_{ii}} \qquad (\sum_j) R_{ij} + r_{ii} = R_{ij}$$

e que o símbolo $(\sum_j)$ exclue a repetição de índices e l_{ii}, c_{ii}, r_{ii} são os valores da auto-indução, da capacidade e da resistência que são pertencentes exclusivamente ao circuito i. Portanto, a equação precedente, com as substituïções já indicadas, conduz ao resultado:

$$\frac{d}{dt}\left[(\sum_j) L_{ij} I_j + I_i (\sum_j) L_{ij} + l_{ii} I_i\right] + (\sum_j) R_{ij} I_j + I_i (\sum_j) R_{ij} + r_{ii} I_{ii} + (\sum_j) \frac{1}{C'_{ij}} Q_j +$$

$$+ Q_i (\sum_j) \frac{1}{C'_{ji}} + \frac{1}{C_{ii}} Q_i = E_i$$

ou:

$$\frac{d}{dt}\left[(\sum_j) L_{ij} i_{ij} + l_{ii} I_{ii}\right] + (\sum_j) R_{ij} i_{ij} + r_{ii} I_{ii} + (\sum_j) \frac{q_{ij}}{c_{ij}} + \frac{Q_{ii}}{C_{ii}} = E_i$$

que é a expressão vulgar da lei de Kircchoff aplicada ao circuito i. Ficou portanto provado que as equações (1) são equivalentes às equações de Kircchoff e determinam sem ambigüidade as correntes.

Apliquemos agora as equações de Lagrange à rêde considerada, tomando como coordenadas generalidades as cargas Q_i, isto é assemelhando a rêde a um sistema mecânico com p graus de liberdade. É então óbvio que as correntes corresponderão às velocidades generalizadas, isto é: $Q'_i = I_i$. Façamos, além disso, a hipótese de que a fôrça viva T é

representada pela energia electro-magnética acumulada nas auto-induções e induções mútuas e a energia potencial W pela energia electrostática dos condensadores. Para determinarmos o que corresponde às fôrças generalizadas, consideremos a energia eléctrica total, que em cada instante é recebido pelo circuito. É evidente que é igual ao trabalho das fontes de energia, diminuída das perdas por efeito Joule nas resistências, e tem por expressão:

$$[\Sigma E_i I_i - (\sum_i \sum_j) R_{ij} (I_i + I_j)^2 - \sum_i R_{ii} I_i^2] \, dt = \Sigma E_i \, dQ_i$$

pois que a dissipação na resistência R_{ij} é: $R_{ij}(I_i + I_j)^2 = R_{ij} I_i^2 + R_{ij} I_j^2 + 2 R_{ij} I_i I_j$ e portanto

$$\overline{\sum_i \sum_j} R_{ij} (I_i + I_j)^2 = \overline{\sum_i \sum_j} R_{ij} (I_i^2 + I_j^2) + 2 \overline{\sum_i \sum_j} R_{ij} I_i I_j$$

os tracejados sendo relativos a uma combinação de índices $\frac{p(p-1)}{2}$, isto é, um índice figurando apenas uma vez. A dissipação total será:

$$\overline{\sum_i \sum_j} R_{ij} (I_i^2 + I_j^2) + 2 \overline{\sum_i \sum_j} R_{ij} I_i I_j + \sum_i r_{ii} I_i^2 = \overline{\sum_i} R_{ii} I_i^2 + 2 \overline{\sum_i \sum_j} R_{ij} I_i I_j$$

a expressão anterior ficando, por isso, justificada. É evidente que se pode transformar imediatamente na expressão mais conveniente:

$$\Sigma E_i \, d Q_i - \sum_i R_{ii} I_i \, d Q_i - \Sigma \, d Q_i \, . \sum_{i \neq j} R_{ji} I_j$$

Como os $d Q_i$ são os deslocamentos elementares generalizados, então as componentes generalizadas das fôrças terão como expressão:

$$\Theta_i = E_i - R_{ii} I_i - \sum_{i \neq j} R_{ji} I_j = E_i - \Sigma R_{ij} I_j$$

De uma maneira análoga, a energia electromagnética acumulada na rêde pode calcular-se de maneira idêntica obtendo-se o resultado:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum L_{ij} (I_i + I_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_i l_{ii} I_i^2 = \frac{1}{2} \Sigma L_{ii} I_i^2 + \sum_{i \neq j} \sum L_{ij} I_i I_j$$

Convém observar que nestas expressões, as induções mútuas ficam englobadas nas expressões do tipo L_{ij}, pois que em nada se distinguem duma auto-indução, que seja comum a dois circuitos.

Quanto à energia electrostática em nada difere dos cálculos efectuados para os casos precedentes, obtendo-se imediatamente as expressões:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{1}{C_{ij}} (Q_i + Q_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \frac{Q_i^2}{c_{ii}} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{Q_i^2}{C_{ii}} + \Sigma \Sigma \frac{Q_i Q_j}{C_{ij}}$$

As equações de Lagrange aplicadas à rêde considerada tomarão a forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - W)}{\partial I_i} \right] - \frac{\partial (T - W)}{\partial Q_i} = \Theta_i$$

e como:

$$\frac{\partial T}{\partial I_i} = \sum_j L_{ij} I_j \qquad \frac{\partial W}{d Q_i} = \sum_i \frac{Q_j}{C_{ij}}$$

$$\frac{\partial . W}{\partial I_i} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial Q_i} = 0$$

Porque W e T não dependem respectivamente dos Q_i e dos I_i.

Donde, por substituïção, se conclue imediatamente:

$$\frac{d}{dt} \sum_i L_{ij} I_j + \sum_j \frac{Q_j}{C_{ij}} = E_i - \Sigma R_{ij} I_j$$

que é a expressão da lei de Kirchoff, modificada da maneira indicada no princípio dêste parágrafo. Representando por S a energia dissipada por efeito Joule, isto é:

$$S = \sum_i R_{ii} I_i^2 + 2 \sum_{i=j} \sum R_{ij} I_i I_j = \sum_i R_{ii} I_i^2 + \sum_{i=j} \sum R_{ij} I_i I_j ,$$

verifica-se imediatamente que:

$$\frac{\partial S}{\partial I_i} = \Sigma R_{ij} I_j$$

e, portanto, obtêm-se as equações de Maxwell relativas a uma rêde:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial I_i} \right) + \frac{\partial W}{\partial Q_i} + \frac{\partial S}{\partial I_i} = E_i$$

em que T, W, S representam respectivamente as energias electromagnética, electrostática e Joule. Quanto a E_i representa uma f.e.m ou uma f.c.e.m.

De-resto, poderia mostrar-se a equivalência entre as equações de Lagrange dum sistema mecânico a $n - 1$ ligações e as leis de Kirchoff com a forma habitual, desde que se tomem como ligações as $n - 1$ relações entre as correntes dadas pela 1.ª lei de Kirchoff aplicadas aos $n - 1$ nós.

2 — *Dedução das fórmulas de Expansão de Heaviside*

Suponhamos agora que uma rêde, depois de convenientemente excitada, é, no instante $t = 0$, entregue a si mesma, isto é, tôdas as f.e.m são postas fora do circuito nesse instante. Quando todos os parâmetros característicos da rêde são constantes, as equações precedentes dão origem a um sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, sem segundo membro. É claro que, nos diferentes circuitos, circularão correntes que deverão a sua existência, para $t > 0$, à energia prèviamente acumulada nas auto-induções ou nas capacidades. Esta energia, sendo necessàriamente finita, vai, em virtude da dissipação, incessantemente diminuindo, para transformar-se em calor.

O integral geral do sistema linear de coeficientes constantes é, como se sabe, formado por uma soma de exponenciais funções do tempo, ou por exponenciais multiplicadas por funções sinusoidais, também funções do tempo. É óbvio, que essas exponenciais são forçosamente de expoente negativo, pois que, caso contrário, se fôssem positivas, as correntes, crescendo com o tempo, conduziriam a uma dissipação infinita, o que é absurdo; se fôssem nulas, davam origem a correntes constantes ou sinusoidais que, dissipando uma potência

constante, conduziram a uma despesa de energia sempre crescente, para além de qualquer limite. O caso particular, em que no integral geral figuram as funções precedentes, multiplicadas por potências inteiras do tempo, é evidente à *fortiori*.

Consideremos agora o caso em que uma única f. e. m. é aplicada à rêde já mencionada. Admitamos que esta f. e. m. tem um valor nulo para $t \geqslant 0$ e igual a 1 para $t > 0$. A uma função com as características desta f. e. m., chamou Heaviside «função unidade» e representou-o simbòlicamente por 1. Escrevamos as equações de Kirchhoff admitindo que a função de Heaviside é aplicada ao circuito 1 o que, como é evidente, não constitue perda de generalidade. Ter-se-á:

$$\sum_j L_{ij} \frac{dI_j}{dt} + \sum_j R_{ij} I_j + \sum_j \frac{Q_j}{C_{ij}} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

Sabemos que o efeito de introduzir uma f. e. m. constante numa rêde conduz, à parte os fenómenos transitórios, ao estabelecimento de uma corrente constante nos circuitos e, portanto, como o sistema é linear, as correntes serão constituídas por uma soma de parcelas em que figuram, além dêsse têrmo constante, outras em que existem como factores, exponenciais negativas, funções sinusoidais e potências de expoente inteiro. As cargas eléctricas, obtidas pela integração de funções do tipo precedente, têm expressões semelhantes. Tendo isto em vista, multipliquemos as equações precedentes por e^{-pt}, em que $p > 0$, e integremos de 0 a ∞.

Obtém-se:

$$\sum L_{ij} \int_0^\infty e^{-pt} \frac{dI_i}{dt} dt + \sum R_{ij} \int_0^\infty I_j e^{-pt} dt + \sum \frac{1}{C_{ij}} \int_0^\infty Q_i e^{-pt} dt = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-pt} dt & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

e, por integração por partes, conclue-se que:

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{dI_j}{dt} dt = \left[e^{-pt} I_j \right]_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-ht} I_j \, dt \qquad \int_0^\infty e^{-pt} = \frac{1}{p}$$

$$\int_0^\infty e^{-pt} Q_j \, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} Q_j \right]_0^\infty - \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} I_j \, dt$$

Se admitirmos que, antes e até $t = 0$, a rêde não era portadora de quaisquer correntes ou potenciais em nenhum ponto do circuito, então, devido ao aspecto formal apresentado pelos Q_i e pelos I_i, os integrais do segundo membro convergem e as expressões entre colchetes são nulas, ficando, por conseqüência, justificada a existência dos integrais do primeiro membro. Por substituïção, e designando por $\overline{I}_j$ a transformação $p \int_0^\infty I_j e^{-pt} dt$, vem:

$$\sum_j L_{ij} \overline{I}_j + \sum_j \frac{1}{C_{ij} p} \overline{I}_j + \sum R_{ij} \frac{\overline{I}_j}{p} = \begin{cases} \frac{1}{p} & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

que pode escrever-se:

$$\sum \left[\left(L_{ij} p + \frac{1}{C_{ij} p} \right) + R_{ij} \right] \overline{I}_j = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

Notemos que, se quiséssemos estudar o comportamento da rêde precedente em corrente alternada sinusoidal em estado permanente, empregando o método dos imaginários, a impedância complexa relativa ao ramal i, j, seria:

$$z_{ij}(j\omega) = j L_{ij}\omega + \frac{1}{C_{ji}\omega j} + R_{ij}, \qquad j = \sqrt{-1} \qquad Z_{ij} = Z_{ji}$$

o que nos leva, por analogia, a escrever a expressão entre colchetes da fórmula precedente com a notação $z_{ij}(j\omega)$ e, portanto, para as equações precedentes, resulta a forma simplificada:

$$z_{ij}(p)\,\overline{I}_j = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

em que a repetição do índice j significa a soma relativa a êsse índice. Chamaremos aos $\overline{I}_j$ valores transformados e ao sistema de equações lineares precedente sistema transformado. Das propriedades dos sistemas lineares, conclue-se imediatamente que, se o determinante principal do sistema $|Z_{ij}|$ fôr diferente de zero, os valores transformados são bem determinados. Como, por outro lado, a cada valor dum I_j; corresponde apenas um $\overline{I}_j$ e o primeiro é único, somos levados a concluir que a determinação dos $\overline{I}_j$ para uma determinada rêde implica a determinação das correntes dessa rêde. Estas conclusões podem, com maior precisão matemática, ser derivadas a partir do teorema de Lerch, que mais adiante demonstraremos, o qual não obriga a fazer intervir considerações físicas, como no caso da demonstração precedente. Resolvamos o sistema (1) pela regra de Crammer:

$$\overline{I}_j = \frac{|D_{1j}(p)|}{|Z_{ij}(p)|} = A_{1j}(p) = \frac{1}{Z_{1j}(p)}$$

$|D_{j1}|$ representando o cofactor, da linha 1 e da coluna j, do determinante principal. A notação adoptada aparece imediatamente justificada, se observarmos que, quando aplicamos uma f.e.m sinusoidal à rêde no circuito 1, a impedância imaginária relativa à corrente no circuito j, tem por expressão:

$$\frac{|D_{1j}(j\omega)|}{|Z_{1j}(j\omega)|} = \frac{1}{Z_{1j}(j\omega)}$$

É claro que, se a f.e.m 1 fôr aplicada no circuito i, a corrente no circuito j será:

$$I_j = \frac{|D_{ij}|}{|Z_{ij}|} = A_{ij}(p) = \frac{1}{Z_{ij}(p)}$$

As expressões $Z_{ij}(p)$ e $A_{ij}(p)$ serão respectivamente designadas, por analogia, impedâncias e admitâncias simbólicas e denominadas próprias, quando $i = j$ e mútuas, quando $i \neq j$. A admitância simbólica é uma fracção algébrica que, no caso geral, tem um numerador de grau inferior ao denominador. Os casos particulares, em que isto não sucede, serão examinados posteriormente. Decompunhamos a admitância, cujos denominadores têm sempre raízes negativas ou com parte real negativa e que nós supomos serem tôdas distintas, segundo a fórmula de decomposição em fracções racionais simples, bem conhecida:

$$\frac{P_m(\varrho)}{P_n(\varrho)} = \sum_1^n \frac{P_m(\varrho_k)}{(\varrho - \varrho_k)\,P'_n(\varrho)}$$

Obtém-se, designando por α_i as raízes do dominador:

(2) $$A_{ij}(p) = \frac{f(p)}{F(p)} = \sum_{1}^{n} \frac{f(\alpha_r)}{(p-\alpha_r)\,F'(\alpha_r)}$$

Tomando em atenção a natureza das raízes α_i, o integral:

$$p = \int_{o}^{\infty} e^{-pt}\left(e^{\alpha_r t} - 1\right) dt$$

é convergente e o seu valor, como se verifica imediatamente, é:

$$\frac{\alpha_r}{p-\alpha_r}$$

Cada uma das parcelas é, por isso, o valor transformada duma expressão:

$$\frac{f(\alpha_r)}{\alpha_i F'(\alpha_r)}\left(e^{\alpha_r t} - 1\right) dt$$

e, portanto, o valor da corrente, provocada no circuito j, por uma f. e. m 1, aplicada em i será:

$$I_{ij} = \sum_{r} \frac{f(\alpha_r)}{\alpha_i F'(\alpha_r)}\left(e^{\alpha_r t} - 1\right)$$

$$= \sum_{r} \frac{f(\alpha_r)}{\alpha_r F'(\alpha_r)}\, e^{\alpha_r t} - \sum_{r} \frac{f(\alpha_r)}{\alpha_r F'(\alpha_r)}$$

Como o último somatório é idêntico à expressão $A_{ij}(O)$, o que é fácil de constatar fazendo em (2) $p = o$, vem:

(3) $$I_{ij}(t) = \sum_{r} \frac{f(\alpha_r)}{\alpha_r F'(\alpha_r)}\, e^{\alpha_r t} + A_{ij}(o)$$

Por derivação em ordem a p:

$$Z'_{ij}(p) = \frac{F'(p)\,f(p) - f'(p)\,F(p)}{f^2(p)}$$

e porque $F(\alpha_r) = o$ conclue-se:

(4) $$Z'_{ij}(\alpha_r) = \frac{F'(\alpha_r)}{f(\alpha_r)}$$

e finalmente:

$$I_{ij}(t) = \sum_{r} \frac{1}{\alpha_r Z'_{ij}(\alpha_n)}\, e^{\alpha_r t} + \frac{1}{Z_{ij}(o)}$$

Como é evidente, devido à linearidade das equações, se a f. e. m., em lugar de ter o valor unidade, tivesse o valor E; a corrente produzida no circuito j por essa f. e. m. quando colocada no circuito i era:

$$I_{ij}(t) = \sum_{r} \frac{E\, e^{\alpha_r t}}{\alpha_r Z'_{ij}(\alpha_r)} + \frac{E}{Z_{ij}(o)}$$

Esta fórmula é ordinàriamente denominada «fórmula da expansão de Heaviside».

Observa-se que o último termo não representa mais do que a componente contínua da corrente, pois que, fazendo na expressão da impedância $Z_{ij}(p)$, $p = o$, se obtém a resistência total da rêde, vista de i, sôbre o cicuito j. Convém notar que a igualdade evidente $Z_{ij} = Z_{ji}$, implica a relação $A_{ij} = A_{ji}$, pois que estas expressões são quocientes de determinantes em que os numeradores são os cofactores i, j e j, i do determinante principal, os quais são iguais, porque o determinante principal é simétrico.

Desta conclusão resulta o teorema da reciprocidade que se enuncia: «Se uma f.e.m, aplicada num circuito, produz uma corrente determinada no circuito j então, quando aplicada em j, produzirá uma corrente em i igual à que existia no primeiro caso em j. Esta propriedade é absolutamente geral, pois que o teorema de sobreposição, que mais adiante demonstraremos, mostra que, para qualquer f.e.m aplicada a um circuito, a corrente em qualquer ponto é caracterizada pela sua impedância simbólica. A resposta duma rêde, num determinado circuito, à f.e.m. unidade, aplicada em qualquer outro circuito, foi denominada por Carson admitância indicadora própria ou transferitiva, conforme se trata de I_{ii} ou I_{ij}.

À fórmula da expansão convém, para seu uso, dar-lhe por vezes uma forma diferente, que se obtém imediatamente a partir da expressão (3) pela substituïção de $F'(\alpha_p)$ pelo seu valor:

$$I_{ii} = \sum_r \frac{f(\alpha_r)}{\alpha_r \prod\limits_{k \neq r} (\alpha_r - \alpha_k)} + \frac{1}{Z_{ii}(0)}$$

pois que: $F(\alpha) = \prod\limits_i (\alpha - \alpha_i)$ e $F'(\alpha_k) = \prod\limits_{k \neq r}^{k} (\alpha_r - \alpha_k)$

Tratemos agora de estudar o caso em que a admitância simbólica é um quociente de polinómios do mesmo grau. Pode escrever-se, por divisão:

$$A_{ij}(p) = k + A^1_{ij}(p). \tag{5}$$

Observando que uma constante corresponde, como valor transformado pelo integral: $p \int_0^{\infty} e^{-pt} k \, dt = K$, precisamente à mesma constante, e que a admitância $A^1_{ij}(p)$ pode ser incluída no caso precedente, a expressão anterior pode transformar-se em:

$$I_{ij}(t) = \sum_r \frac{e^{\alpha_p t}}{\alpha_r (Z^1_{ij}(\alpha_r))_1} + \frac{1}{(Z_{ij}(0))_1} + K. \tag{6}$$

Antes de prosseguirmos, convém observar a significação física dêste resultado. Quando se faz $t = 0$, a expressão correspondente a $A^1_{ij}(p)$ anula-se, o que se verifica imediatamente fazendo em (2) $p = 0$ e substituindo em (3). Conclue-se, portanto, sem dificuldade que, quando a impedância simbólica é um quociente de polinómicos do mesmo grau, a corrente estabelece-se imediatamente com um valor finito. Como de (5) se tira:

$$A_{ij}(0) = k + A^1_{ij}(0) = \frac{1}{Z_{ij}(0)} = \frac{1}{Z_{ij}^{1}(0)} + K$$

e por derivação de $\frac{1}{A_{ij}(0)}$, como no caso anterior, se deduz que:

$$[Z_{ij}(p)] = \left(\frac{1}{k + \frac{1}{Z^1_{ij}(p)}}\right)' = \frac{[Z^1_{ij}(p)]' [k + Z^1_{ij}(p)] - [Z^1_{ij}(p)]' Z^1_{ij}(p)}{[k + Z^1_{ij}(p)]^2}$$

atendendo a que $Z^1_{ij}(0) = 0$, vem finalmente:

$$Z^1_{ij}(0) = [Z^1_{ij}(0)]'$$

Substituíndo em (6), reconhece-se sem dificuldade, que a fórmula da expansão continua a ser a mesma que a do caso precedente.

Uma discussão simples baseada na análise directa do quociente dos determinantes, que formam a expressão da admitância simbólica, mostraria que o grau de numerador só pode exceder de uma unidade o do denominador. Para completarmos o estudo da fórmula da expansão falta considerarmos êste último caso. Como precedentemente, obtém-se por divisão:

$$A_{ij}(b) = k\,p + A^1_{ij}(p)$$

e que $A^1_{ij}(p)$ tem uma expressão de tipo pertencente a um dos dois já considerados. Afim de objectivar as circunstâncias em que a corrente se estabelece no circuito considerado, examinemos uma rêde cuja admitância simbólica tem precisamente o valor $A^1_{ij}(p)$, mas de tal forma que a f. e. m 1, se encontre posta em paralelo por um condensador, cuja capacidade é K. Reconhece-se imediatamente que a admitância do conjunto tem exactamente a expressão precedente, pois que a admitância do condensador é K p.

A corrente total fornecida pela f. e. m 1 distribui-se, portanto, em duas partes: uma que carrega o condensador e outra que se destina à rêde de admitancia A^1_{ij}. Sabe-se que um condensador, colocado aos bornes de uma f. e. m V, sem resistência interna, toma instantâneamente uma carga CV. Um tal resultado implica a existência de uma corrente que é sempre nula quando $t \neq o$ e infinita para $t = o$ e de tal maneira que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\,dt = c\,V.$$

Uma função $\delta(t)$ dêste tipo e tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$, é conhecida por função impulsiva ou de Dirac. Obtém-se uma maneira de definir uma função contínua, obedecendo às condições precedentes, escrevendo:

$$\delta(t) = o \qquad t < o$$

$$\delta(t) = \frac{1}{\epsilon} \qquad o < t < \epsilon$$

$$\delta(t) = o \qquad t > o$$

quando se faz tender ϵ para zero. Transformemos $\delta(t)$ por intermédio da transformação de Laplace:

$$p\int_{o}^{\infty} \delta(t)\,e^{-pt}\,dt = \frac{p}{\epsilon}\int_{o}^{\epsilon} e^{-pt} = \frac{1}{\epsilon}\left(1 - e^{-p\epsilon}\right)$$

Porque $\delta(t)$ é nula fora do intervalo aberto O, ϵ). Fazendo tender ϵ para O, a expressão final tende para p, e assim o valor transformado de $\delta(t)$ é p. Como disso não resulta ambigüidade representaremos a função impulsiva pelo símbolo p de preferência a $\delta(t)$. Podemos portanto escrever a fórmula da expansão para o caso presente:

$$I_{ij}(t) = E\,k\,p + \sum_r \frac{E\,e^{\alpha_r t}}{\alpha_r\,Z'_1(\alpha_r)} + \frac{E}{Z_1(o)},$$

em que o índice 1, que afecta as impedâncias, resulta da decomposição indicada em (6).

Quando a admitância simbólica não tem as raízes tôdas distintas, a fórmula da expansão não é válida, pois que a decomposição de A (p) tem de ser feita de maneira diferente. Uma tal decomposição é, para uma raiz de multiplicidade B, os coeficientes A sendo determinados pela maneira habitual:

$$\frac{f(p)}{F(p)} = \frac{f(p)}{(p-\alpha_1)^B \varphi(p)} = \frac{A_1}{(p-\alpha_1)^B} + \frac{A_2}{(p-\alpha_2)^{B-1}} \cdots \frac{A_B}{(b-\alpha_1)} + R(p),$$

supondo, por simplicidade, o grau de f (p) inferior ao de F (p).

Como:

$$\frac{1}{p-\alpha_1} = \int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha_1 t} dt,$$

obtém-se imediatamente, por derivações sucessivas em ordem a p, a derivação debaixo do sinal de integral sendo legítima:

$$\frac{m!}{(p-\alpha_1)^m} = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-pt} e^{\alpha_1 t} dt,$$

ou

$$\frac{p}{(p-\alpha_1)^m} = p \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\alpha t} e^{-pt} dt.$$

Suponhamos, para comodidade de cálculo, que a admitância A (p) tem apenas uma raiz α_n de multiplicidade m. Então, pode escrever-se:

$$A(t) = \frac{f(p)}{F(p)} = p \cdot \frac{f(p)}{p F(p)} = p \frac{f(p)}{p(p-\alpha_1)\cdots(p-\alpha_2)^m}$$

Decompondo em fracções simples, e tendo em conta que $[p F(p)]' = F(p) + p F'(p)$, obtém-se, depois de observar que $[\alpha_r F(\alpha_r)]' = \alpha_r F'(\alpha_r)$:

$$A(t) = \frac{f(o)}{F(o)} + \sum_{i \neq r}^{i} \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_i F^1(\alpha_r)} p + \frac{A_1 p}{(p-\alpha_r)^m} + \frac{A_2 p}{(p-\alpha_r)^{n-1}} \cdots + \frac{A_8 p}{(p-\alpha_r)},$$

reparando que os factores, que correspondem às raizes simples, são decompostos como nos métodos precedentes. Transformando, pela utilização da expressão (8), o resultado anterior:

$$I(t) = \frac{1}{Z(o)} + \sum_{i=r}^{i} \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_i F^1(\alpha_i)} e^{\alpha_i t} + e^{\alpha_r t}\left[\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^m}{(m-2)!} + \cdots A_m\right],$$

ou ainda:

$$I(t) = \frac{1}{Z(o)} + \sum_{i=n}^{i} \frac{e^{\alpha_i t}}{\alpha_i Z^1(\alpha_i)} + e^{\alpha_r t}\left[\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots A_m\right].$$

A expressão precedente mostra que, quando há raizes múltiplas, além da fórmula da expansão habitual para as raizes simples, há que juntar expressões de tipo:

$$e^{\alpha_r t}\left[\frac{A_1 t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A_2 t^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots A_{n-1} t + A_n\right]$$

para cada uma das raizes de multiplicidade n, os A sendo obtidos pelos métodos usuais da decomposição em fracções racionais simples.

Exemplos:

1) Dois circuitos iguais possuindo uma resistência R e uma auto-indução L em série, são acoplados pela indução mútua M. Num determinado instante é aplicada a um dos circuitos uma f. e. m. constante E. Calcular a corrente dos dois circuitos no caso de um acoplamento:

a) Frouxo $M \neq L$
b) Perfeito $M = L$

a) Escrevamos as equações, empregando o método simbólico utilizado no cálculo das correntes em corrente alternada, tendo o cuidado de substituir $j\omega$ por p. Obtém-se o sistema:

$$E = L p \bar{i}_1 + R \bar{i}_1 - M p \bar{i}_2$$

$$0 = L p \bar{i}_2 + R \bar{i}_2 - M p \bar{i}_1$$

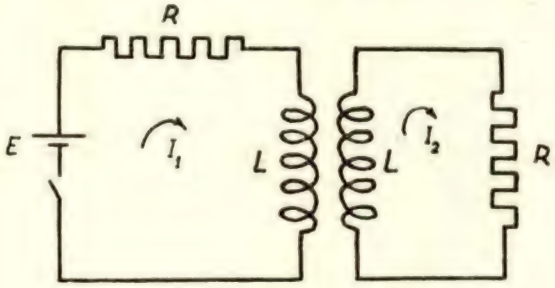


Fig. 1

ou, fazendo $Z = L p + R$:

$$F = Z \bar{i}_1 - M p \bar{i}_2$$

$$0 = - M p \bar{i}_1 + Z \bar{i}_2$$

Portanto:

$$A_0 (p) = \frac{Z}{Z^2 - M^2 p^2} \qquad A_2 (p) = \frac{M p}{Z^2 - M^2 p^2}$$

Aplicando a fórmula da expansão:

$$I = E \Sigma \frac{f(\alpha_i)}{\alpha_i \prod_{i \neq p}^{p} (\alpha_i - \alpha_p)} + \frac{E}{Z(0)}$$

e observando que:

$$\frac{1}{Z_0 (0)} = \frac{1}{R} \qquad \frac{1}{Z_2 (0)} = 0 \qquad f_0 (p) = \frac{L p + R}{L^2 - M^2} \qquad f_2 (p) = \frac{M p}{L^2 - M^2}$$

vem, depois de simplificações:

$$I_1 = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} \left(e^{-\frac{R}{L-M} t} + e^{-\frac{R}{L+M} t} \right)$$

$$I_2 = \frac{E}{2R} \left(e^{-\frac{R}{L+M} t} - e^{-\frac{R}{L-M} t} \right)$$

b) $L = M$. O acoplamento é perfeito pois que $M = \sqrt{L L} = L$ e, portanto:

$$Z^2 - M^2 p^2 = 2 L R \left[p + \frac{R}{2L} \right]$$

$$A_1(p) = \frac{R + L\,p}{2\,L\,R\left(p + \frac{R}{L\,2}\right)} \qquad A_2(p) = \frac{M\,p}{2\,L\,R\left(p + \frac{R}{2\,L}\right)}$$

Verifica-se que os termos das fracções, que representam as admitâncias, têm o mesmo grau, o que corresponde ao caso de correntes iniciais diferentes de zero. Tem-se imediatamente, aplicando a fórmula da expansão:

$$I_1 = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{L}{R^2}\,e^{-\frac{R}{2L}t}\right) \qquad I_2 = -\frac{M\,L}{R^2}\,e^{-\frac{R}{2L}t}$$

2) Determinar a corrente no extremo da rêde recorrente indicada esquemàticamente na figura, constituída por $n - 2$ circuitos idênticos, quando se aplica uma f. e. m igual a E no instante $t = 0$.

Para o circuito 1 obtém-se por aplicação da lei de Kirchoff:

$$\left(\frac{L_1\,p + R_1}{2} + R + L\,p\right)\overline{I}_1 - (L\,p + R)\,\overline{I}_2 = E. \tag{1}$$

anàlogamente para o circuito j:

$$\overline{I}_j\,(L_1\,p + R_1 + 2\,R + 2\,L\,p) - (R + L\,p)\,(\overline{I}_{j+1} + \overline{I}_{j-1}) = 0\,. \tag{2}$$

e finalmente para o circuito n:

$$\left(\frac{L_1\,p + R_1}{2} + R + L\,p\right)\overline{I}_n - (R + L\,p)\,\overline{I}_{n-1} = 0\,. \tag{3}$$

Para resolvermos (2), que é uma equação às diferenças finitas, basta fazer:

$$I_j = \alpha^j$$

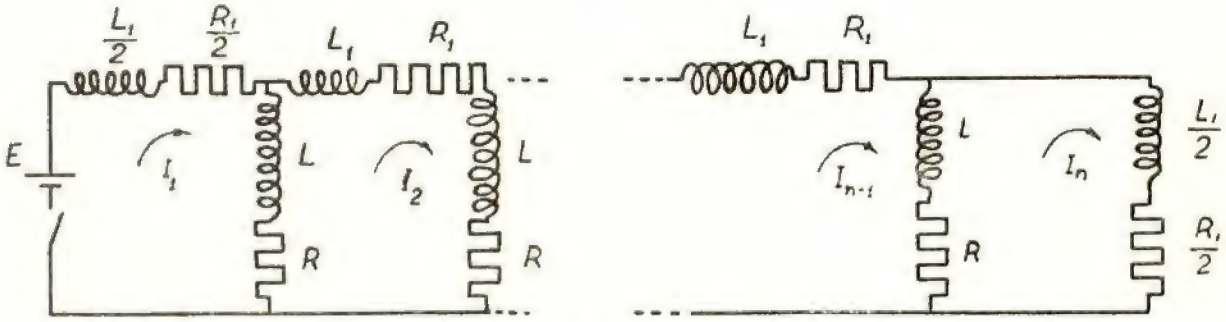


Fig. 2

que, por substituïção em (2), dá uma equação de segundo grau em α:

$$\alpha^2 - 2\left(\frac{Z_1}{2\,Z} + 1\right) + 1 = 0 \qquad \begin{array}{l} Z_1 = L_1\,p + R_1 \\ Z = L\,p + R \end{array}$$

Se as duas raizes da equação precedente forem α_1 e α_2, a solução geral de (2) será:

$$I_j = A\,\alpha_1^j + B\,\alpha_2^j$$

em que os valores A e B são determinados pelas condições impostas aos terminais da rêde pelas relações (1) e (3).

Como:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = 1 + \frac{Z_1}{2Z} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{2Z}\right)^2 - 1}$$

vem, substituindo $1 + \frac{Z_1}{2Z}$ por $\cos h\,\Theta$ e notando que o radicando é igual a $\text{sen}^2 h\,\Theta$:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = \cos h\,\Theta \pm \text{sen}\,h\,\Theta = e^{\pm\theta}$$

Logo, por substituïção dos valores precedentes em (1) e (3):

$$\frac{E}{Z} = \cos h\,\Theta\,(A\,e^{\theta} + B\,e^{-\theta}) - (A\,e^{2\theta} + B\,e^{-2\theta})$$

$$O = \cos h\,\Theta\,(A\,e^{n\theta} + B\,e^{-n\theta}) - A\,e^{(n-1)\theta} + B\,e^{-(n-1)\theta})$$

e, por transformações simples:

$$\frac{E}{Z\,\text{sen}\,h\,\Theta} = -A\,e^{\theta} + B\,e^{-\theta}$$

$$O = -A\,e^{n\theta} + B\,e^{-n\theta}$$

Obtendo-se, pela resolução do sistema de equações precedente:

$$B = \frac{E\,e^{n\theta}}{[e^{(n-1)\theta} - e^{-(n-1)\theta}]\,Z\,\text{sen}\,h\,\Theta} = \frac{E\,e^{n\theta}}{2\,Z\,\text{sen}\,h\,(n-1)\,.\,\Theta\,\text{sen}\,h\,\Theta}$$

$$A = \frac{E\,e^{-n\theta}}{2\,z\,\text{sen}\,h\,(n-1)\,\Theta\,\text{sen}\,h\,\Theta}$$

e, portanto, a admitância simbólica, para o circuito n:

$$An\,(p) = \frac{1}{z\,\text{sen}\,h\,(n-1)\,\Theta\,\text{sen}\,h\,\Theta}$$

O denominador da expressão precedente, como é fácil de observar, é uma função raçional de p. Com efeito, a aplicação directa da lei do Kicchoff conduziria a um sistema de equações lineares, cujas soluções seriam forçosamente racionais.

Procuremos as raízes que anulam o denominador de $A_n\,(p)$. É conveniente notar que a equação $z = 0$ conduz a um valor infinito de Θ e, portanto, não anula o denominador tornando-o, pelo contrário, infinito.

Utilizando as identidades:

$$\text{sen}\,h\,(n-1)\,\Theta = -j\,\text{sen}\,j\,(n-1)\,\Theta \qquad \cos h\,\Theta = \cos j\,\Theta$$

obtém-se imediatamente as raízes do denominador:

$$\Theta = \frac{k\,n}{(n-1)\,j},$$

com as equações correspondentes em p:

$$1 + \frac{L_1 p + R_1}{2(Lp + R)} = \cos\frac{k\pi}{(m-1)} . \qquad k = (0, 1 \ \ldots \ n-1)$$

Os valores procurados são evidentemente:

$$p_0 = -\frac{R_1}{L_1} \qquad\qquad p_{n-1} = -\frac{4R + R_1}{L_1 + 4L}$$

$$p_k = \frac{2R\left[\cos\frac{k\pi}{n-1} - 1\right] - R_1}{L_1 - 2L\left[\cos\frac{k\pi}{n-1} - 1\right]}$$

Substituamos os valores achados na expressão de $Z(p)$ Tem-se:

$$Z'(p) = z' \operatorname{sen h}(n-1)\Theta \operatorname{sen h}\Theta + [2\cos h(n-1)\Theta \operatorname{sen h}\Theta + Z \operatorname{sen h}(n-1)\Theta \cos h\Theta]\,\Theta'_p$$

$$\Theta'_p = \frac{1}{\operatorname{sen h}\Theta} \times \frac{L_1 R - L R_1}{2(Lp + R)^2} = \frac{Z'}{\operatorname{sen h}\Theta}$$

Encontra-se sem dificuldade:

$$Z'(p_k) = (-1)^k \frac{L_1 R - L R_1}{2(Lp_k + R)} \qquad k = (1, 2, 3 \ \ldots \ n-2)$$

Porém, para $K = 0$ e $K = n-1$ é necessário levantar uma indeterminação e assim:

$$\lim_{p \to p_0} Z'(p) = \frac{L_1 R - L R_1}{2\left(-\frac{LR}{L_1} + R\right)} + \frac{L_1 R - L R_1}{2\left(-\frac{LR}{L_1} + R\right)} + \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen h}(n-1)\Theta}{\operatorname{sen h}\Theta} = n L \frac{L_1 R - L R_1}{2 L_1 (R - R_1)}$$

e de uma maneira semelhante:

$$\lim_{p \to p_{n-1}} Z'(p) = (n-2)(-1)^{n-1} \frac{L_1 + 4L}{2}$$

Para aplicarmos a fórmula da expansão resta calcular $Z(0)$. Para isso escrevamos:

$$e^{-(1-m)\theta} = (\cos h\Theta + \operatorname{sen h}\Theta)^{(m-1)} = \cos^{(m-1)} h\Theta + (m-1)\cos^{(m-2)} h\Theta \operatorname{sen h}\Theta \ldots \operatorname{sen}^{(m-1)} h\Theta$$

$$e^{(1-m)\theta} = (\cos h\Theta - \operatorname{sen h}\Theta)^{-(m-1)} = \cos^{(n-1)} h\Theta - (m-1)\cos^{(n-2)}\Theta \operatorname{sen h}\Theta\,(-1)^{(m-1)} \operatorname{sen h}\Theta$$

e por subtracção:

$$\operatorname{sen h}(n-1)\Theta = (m-1)\cos^{(m-2)} h\Theta \operatorname{sen h}\Theta + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \times 2 \times 3} \cos h^{(m-4)} \operatorname{sen}^3 h\Theta$$

e portanto:

$$Z(0) = Z \operatorname{sen h}\Theta \operatorname{sen h}(n-1)\Theta = \left[(m-1)\left(1 + \frac{R_1}{2R}\right)^{n-2}\left(\frac{R_1^2}{4R^2} + \frac{R_1}{R}\right)^{m-1} + \right.$$

$$+\frac{(m-3)\ (m-2)}{3\times 2\times 1}\left(1+\frac{R_1}{2R}\right)^{m-4}\left(\frac{R_1^2}{4R^2}+\frac{R_1}{R}\right)^3\cdots\Bigg]R$$

$$=\sum_j C_{2j-1}^{n-1}\left(1+\frac{R_1}{2R}\right)^{n-2j}\left(\frac{R_1^2}{2R}+R_1\right)^{2j-1}$$

Aplicando a fórmula da expansão, obtem-se imediatamente:

$$i_n=\sum_{r=1}^{n-1}(-1)\frac{2E\,(L\,p_2+R)}{p_r\,(L_1-L\,R_1)}\,e^{p_r t}-\frac{2E\,L_1^2\,(R-R_1)}{n\,R_1\,L\,(L_1\,R-L\,R_1)}\,e^{-\frac{R_1}{L}t}-$$

$$-(-1)^{n-1}\frac{2E}{(L_1\,R+R_1)(n-2)}\,e^{-\frac{R_1+L_1R}{L_1+L_1L}t}+\frac{E}{\sum\limits_j C_{2j-1}^{n-1}\left(1+\frac{R_1}{2R}\right)^{n-2j}\left(\frac{R_1^2}{2R}+R_1\right)^{2j-1}},$$

a última fracção correspondendo à componente contínua da corrente.

5) Estudemos o estabelecimento da corrente no caso indicado na figura junta. Obtém-se:

$$\bar{I}_1\left(R+\frac{1}{C_1 p}\right)-R\,\bar{I}_2=E$$

$$-\bar{I}_1\,R+\bar{I}_2\left(R+\frac{1}{C_2 p}\right)=0$$

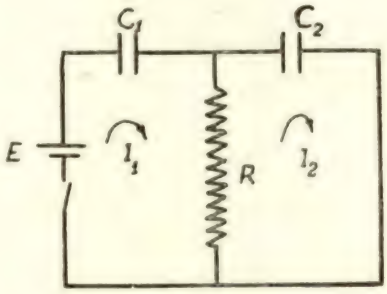


Fig. 3

e portanto:

$$A_1(p)=\frac{R\,C_1\,C_2\,p^2+C_1\,p}{p\,(C_1+C_2)\,R+1}$$

$$A_2(p)=\frac{R\,C_1\,C_2\,p^2}{p\,(C_1+C_2)\,R+1}.$$

As relações precedentes mostram que o grau do numerador é superior ao do denominador e, por isso, a corrente é impulsiva. Logo, por divisão:

$$A_1(p)=\frac{C_1+C_2}{C_1\,C_2}\,p+\frac{1}{R}\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{1}{C_1\,C_2}\right)\times\frac{p}{p+\frac{1}{R\,(C_1+C_2)}}$$

$$A_2(p)=\frac{C_1+C_2}{C_1\,C_2}\,p-\frac{1}{R\,C_1\,C_2}\times\frac{p}{p+\frac{1}{R\,(C_1+C_2)}},$$

o que mostra que depois do impulso, isto é, para $t>0$ a corrente parte, em qualquer dos casos, de um valor finito não nulo.

Aplicando a fórmula da expansão para o caso impulsivo encontra-se imediatamente:

$$I_1=E\,\frac{C_1+C_2}{C_1\,C_2}\,p+\frac{E}{R}\left(\frac{C_1}{C_1+C_2}-\frac{1}{C_1\,C_2}\right)e^{-\frac{t}{R\,(C_1+C_2)}}$$

$$I_2=E\,\frac{C_1+C_2}{C_1\,C_2}\,p-\frac{E}{R\,C_1\,C_2}\,e^{-\frac{t}{R\,(C_1+C_2)}}.$$

As relações precedentes mostram que, no instante $t=0$, os condensadores tomam a carga correspondente à sua ligação em série.

Para $t>0$ o condensador C_2 descarrega-se, emquanto o condensador C_1 se vai carregando até adquirir a carga $E\,C_1$.

(*Continua*)

UM CONCEITO DE PROBABILIDADE

(Continuação)

PELO ENG. CIVIL I. S. T. JOSÉ PINTO MACHADO

2 — *Propriedade das quantidades finitas positivas tendo por dimensão quantidades infinitas de dimensões finitas negativas e das quantidades infinitas positivas tendo por dimensão quantidades infinitas de dimensões finitas negativas.*

a) *Análise operatória*

Propriedade primeira

1 — Duas quantidades, $b^{m \frac{1}{\log_c b}} \infty^{-\alpha}$, e, $b^{p \frac{1}{\log_d b}} \infty^{-\beta}$, dizem-se da mesma dimensão, sempre que,

a) $\infty^{-\alpha} = \infty^{-\beta}$

b) nos casos limite
$$\begin{cases} \infty^{-\beta} = \infty^{-(\alpha+1)}, \text{para}, p \dfrac{1}{\log_d b} = \\ = 0, \text{ ou}, m \dfrac{1}{\log_c b} = \infty \\ \infty^{-\alpha} = \infty^{-(\beta+1)}, \text{para}, p \dfrac{1}{\log_d b} = \\ = \infty, \text{ ou}, m \dfrac{1}{\log_c b} = 0 \end{cases}$$

2 — Duas quantidades, $b^{m \frac{1}{\log_\infty b}} \infty^{-\alpha}$, e, $b^{p \frac{1}{\log_\infty b}} \infty^{-\beta}$, dizem-se da mesma dimensão, sempre que,

a) $\infty^{-\alpha} = \infty^{-\beta}$

b) nos casos limite
$$\begin{cases} \infty^{-\beta} = \infty^{-(\alpha+1)}, \text{para}, p \dfrac{1}{\log_\infty b} = \\ = 0, \text{ ou}, m \dfrac{1}{\log_\infty b} = \infty \\ \infty^{-\alpha} = \infty^{-(\beta+1)}, \text{para}, p \dfrac{1}{\log_\infty b} = \\ = \infty, \text{ ou}, m \dfrac{1}{\log_\infty b} = 0 \end{cases}$$

3 — Duas quantidades, $b^{m \frac{1}{\log_c b}} \infty^{-\alpha}$, e, $b^{p \frac{1}{\log_\infty b}} \infty^{-\beta}$, dizem-se da mesma dimensão, sempre que,

a) $\infty^{-\alpha} = \infty^{-\beta}$

b) nos casos limite
$$\begin{cases} \infty^{-\beta} = \infty^{-(\alpha+1)}, \text{para}, p \dfrac{1}{\log_\infty b} = \\ = 0, \text{ ou}, m \dfrac{1}{\log_c b} = \infty \\ \infty^{-\alpha} = \infty^{-(\beta+1)}, \text{para}, p \dfrac{1}{\log_\infty b} = \\ = \infty, \text{ ou}, m \dfrac{1}{\log_c b} = 0 \end{cases}$$

Propriedade segunda

1 — Duas quantidades da mesma dimensão, $b^{m \frac{1}{\log_c b}} \infty^{-\alpha}$, e, $b^{p \frac{1}{\log_d b}} \infty^{-\alpha}$, dizem-se iguais sempre que ocupem o mesmo lugar na sucessão matriz; a condição, necessária e suficiente, para que isso se dê é traduzida analìticamente pela igualdade,

$$b^{m \frac{1}{\log_c b}} = b^{p \frac{1}{\log_d b}}$$

2 — Duas quantidades da mesma dimensão, $b^{m \frac{1}{\log_\infty b}} \infty^{-\alpha}$, e, $b^{p \frac{1}{\log_\infty b}} \infty^{-\alpha}$, dizem-se iguais, sempre que ocupem o mesmo lugar na sucessão matriz; a condição, necessária e suficiente, para que isso se dê é traduzida analìticamente pela igualdade,

$$m = p$$

Propriedade terceira

1 — Dadas duas quantidades da mesma dimensão, $b^{\pm m \frac{1}{\log_c b}} \infty^{-\alpha}$, e, $b^{\pm p \frac{1}{\log_p b}} \infty^{-\alpha}$, diz-se que a primeira é maior do que a segunda, quando aquela ocupa, relativamente a esta, um lugar à sua direita na sucessão matriz; a condição, necessária e suficiente para que isso se dê traduz-se analìticamente, segundo as circunstâncias, pelas desigualdades,

1) $$m \frac{1}{\log_c b} > p \frac{1}{\log_d b}$$

2) $$-m \frac{1}{\log_c b} < 0 \,;\; p \frac{1}{\log_d b} > 0$$

3) $$-m \frac{1}{\log_c b} < -p \frac{1}{\log_d b}$$

2) — Dadas duas quantidades da mesma dimensão, $b^{\pm m \frac{1}{\log_{\infty} b} + \infty^{-\alpha}}$, e, $b^{\pm p \frac{1}{\log_{\infty} b} \infty^{-\alpha}}$, diz-se que a primeira é maior do que a segunda, quando aquela ocupa, relativamente a esta, na sucessão matriz, um lugar à sua direita; a condição necessária e suficiente para que isso se dê, traduz-se analìticamente, pelas desigualdades,

1) $$m > p$$

2) $$-m < 0 \,;\; p > 0$$

3) $$-m < -p$$

Propriedade quarta — Propriedade fundamental.

Teorema VI_a — O cociente, da fracção imprópria, entre duas quaisquer quantidades da mesma dimensão, pertencentes à mesma sucessão matriz, é sempre superior a qualquer quantidade de dimensão diferente colocada, nessa sucessão, à esquerda da quantidade dada.

Demonstração:

A fracção imprópria dê menor cociente, entre duas quantidades da mesma dimensão, apresentará, genèricamente, um qualquer dos dois seguintes aspectos,

$$\frac{\lim\limits_{\Delta_m \to 0} b^{(m + \Delta m) \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}}{b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\lim\limits_{\Delta_m \to 0} b^{-(m - \Delta m) \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}}{b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}}$$

para, c, qualquer, tanto finito como infinito.

Mas ambos estes cocientes, têm o valor seguinte,

$$\lim_{\Delta_m \to 0} b^{\Delta m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$$

Por outro lado, em conseqüência da própria maneira como esta sucessão foi construída, é legítimo escrever a desigualdade seguinte, que demonstra o teorema enunciado,

$$\lim_{\Delta_m \to 0} b^{\Delta m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} = \lim_{r \to \infty} b^{r \frac{1}{\log_c b} \infty^{-(\alpha + 1)}}$$

Como corolário a êste importante teorema, está a propriedade que se traduz, analìticamente, pelas desigualdades,

1) $$\begin{cases} b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times b^{p \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\beta}} = b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \\ \beta > \alpha \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times b^{p \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\beta}} = b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \\ \text{qualquer que seja } \beta \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times b^{-p \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\beta}} = b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \\ \alpha > \beta \end{cases}$$

Teorema VI_b — O cociente, da fracção imprópria, entre duas quaisquer quantidades da mesma dimensão, é sempre superior a qualquer quantidade de dimensão diferente colocada, em qualquer sucessão escolhida para matriz, à esquerda da quantidade igual à quantidade dada.

Demonstração.

Se sugeitarmos as fracções:

$$\frac{b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}}{b^{p \frac{1}{\log_d b} \infty^{-\alpha}}} \quad \text{e} \quad \frac{b^{-p \frac{1}{\log_d b} \infty^{-\alpha}}}{b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}}$$

à condição expresssa na desigualdade,

$$b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} > b^{p \frac{1}{\log_d b} \infty^{-\alpha}}$$

qualquer delas, porque são iguais, ficará representando, duma forma genérica, as

fracções impróprias entre quantidades de dimensão, $\infty^{-\alpha}$, ou, $-\infty^{-\alpha}$.

Pois bem, vamos mostrar, que o cociente que uma tal fracção representa, é, sempre, superior a qualquer quantidade cuja dimensão esteja colocada à esquerda da dimensão comum das quantidades dadas.

Na verdade, sabemos que é sempre possível escrever as igualdades,

$$\begin{cases} b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} = b^{m' \frac{1}{\log_s b} \infty^{-\alpha}} \\ b^{p \frac{1}{\log_d b} \infty^{-\alpha}} = b^{p' \frac{1}{\log_s b} \infty^{-\alpha}} \end{cases}$$

mesmo que, c, ou, d, sejam números infinitos e portanto desconhecido o valor de $\log_\infty b$.

Mas tais igualdades permitem que se escrevà esta outra,

$$\frac{b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}}{b^{p \frac{1}{\log_d b} \infty^{-\alpha}}} = \frac{b^{m' \frac{1}{\log_s b} \infty^{-\alpha}}}{b^{p' \frac{1}{\log_s b} \infty^{-\alpha}}}$$

que nos reporta êste caso ao anterior deixando-nos assim demonstrado o teorema em questão.

Como corolário a êste importante teorema, está a propriedade analìticamente expressa pelas igualdades,

$$1) \begin{cases} b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times b^{p \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\beta}} = b^{m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \\ \beta > \alpha \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times b^{p \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} = \\ \qquad = b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \\ \text{qualquer que seja } \beta \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} b^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times b^{-p \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\beta}} = \\ \qquad = {}^{-m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \\ \alpha > \beta \end{cases}$$

Propriedade quinta

1 — O produto de duas quantidades da mesma dimensão, pertencentes à mesma sucessão matriz,

$$b^{+m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}, \text{ e, } b^{\pm p \frac{1}{\log_d b} \infty^{-\alpha}},$$

é igual à quantidade da mesma sucessão e da mesma dimensão, $b^{\pm r \infty^{-\alpha}}$, tendo, r, o valor,

$$\pm r = \pm m \frac{1}{\log_c b} \pm p \frac{1}{\log_d b}$$

2 — O produto de duas quantidades da mesma dimensão pertencentes à sucessão de base infinita, $\infty^{\pm m \infty^{-\alpha}}$, e, $\infty^{\pm p \infty^{-\alpha}}$, é igual à quantidade da mesma sucessão e da mesma dimensão, $\infty^{\pm r \infty^{-\alpha}}$, tendo, r, o valor,

$$\pm r = \pm m \pm p$$

3 — O produto de duas quantidades da mesma dimensão, uma pertencente a uma sucessão de base finita, $b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$, e outra pertencente à sucessão de base infinita, $\infty^{\pm p \infty^{-\alpha}}$, é ainda uma quantidade da mesma dimensão, mas a sua representação, em conseqüência da impossibilidade atrás referida em ser conhecido o valor de, $\log_\infty b$, não passar da simples indicação da operação; assim o produto em questão apresentará uma qualquer das duas representações,

$$b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm p \infty^{-\alpha}}$$

ou

$$b^{\left(\pm m \frac{1}{\log_c b} \pm p \frac{1}{\log_\infty b}\right) \infty^{-\alpha}}$$

Propriedade sexta.

1) — A potência finita e positiva, k, duma quantidade, $b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$, é uma quantidade da mesma sucessão e dimensão,

$$\left| b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \right|^k = b^{\pm k m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$$

2) — A potência finitiva e positivo, k, duma quantidade, $\infty^{\pm m \infty^{-\alpha}}$, é uma quantidade da mesma sucessão e dimensão,

$$\left| \infty^{\pm m \infty^{-\alpha}} \right|^{k} = \infty^{\pm k m \infty^{-\alpha}}$$

3) — A potência finita e positiva, k, duma quantidade, $b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm p \infty^{-\alpha}}$, produto de duas quantidades da mesma dimensão, uma pertencente à sucessão matriz de base finita e outra pertencente à sucessão de base infinita, é igual a uma quantidade da mesma natureza e dimensão que se representa assim,

$$\left[b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm p \infty^{-\alpha}} \right]^{k} =$$

$$= b^{\pm k . m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm k . p \infty^{-\alpha}}$$

Propriedade sétima.

1) — A radiciação finita e positiva, k, duma quantidade, $b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$, é uma quantidade da mesma sucessão e dimensão,

$$\sqrt[k]{b^{\pm m \frac{1}{\log_c b}^{-\alpha}}} = b^{\pm \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$$

2) — A radiciação finita e positiva, k, duma quantidade, $\infty^{\pm m \infty^{-\alpha}}$, é uma quantidade da mesma sucessão e dimensão,

$$\sqrt[k]{\infty^{\pm m \infty^{-\alpha}}} = \infty^{\pm \frac{m}{k} . \infty^{-\alpha}}$$

3) — A radiciação finita e positiva, k, duma quantidade, $b^{\pm m \cdot \frac{1}{\log_c b}^{-\alpha}} \times \infty^{\pm p \infty^{-\alpha}}$ produto de duas quantidades da mesma dimensão, uma pertencente à sucessão matriz de base finita e outra pertencente à sucessão de base infinita, é igual a uma quantidade da mesma natureza e dimensão que se representa assim,

$$\sqrt[k]{b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm p \infty^{-\alpha}}} =$$

$$= b^{\pm \frac{m}{p} \cdot \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm \frac{p}{k} \infty^{-\alpha}}$$

Propriedade oitava.

1) — A potência infinita e positiva, $p \infty^{\mu}$, duma quantidade, $b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$, é uma quantidade da mesma sucessão de dimensão $(\alpha - \mu)$,

$$\left| b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \right|^{p \infty^{\mu}} = b^{\pm m . p \frac{1}{\log_c b} \infty^{(\mu - \alpha)}}$$

2 — A potência infinita e positiva, $p \infty^{\mu}$, duma quantidade, $\infty^{\pm m \infty^{\alpha}}$, é uma quantidade da mesma sucessão, de dimensão, $(\mu - \alpha)$,

$$\left| \infty^{\pm m \infty^{-\alpha}} \right|^{p \infty^{\mu}} = \infty^{\pm m . p \infty^{(\mu - \alpha)}}$$

3 — A potência infinita e positiva, $r \infty^{\mu}$, duma quantidade,

$$b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm p \infty^{-\alpha}}$$

é uma quantidade de dimensão, $(\mu - \alpha)$,

$$\left[b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}} \times \infty^{\pm p \infty^{-\alpha}} \right]^{r \infty^{\mu}} =$$

$$= b^{\pm r . m \frac{1}{\log_c b} \infty^{(\mu - \alpha)}} \times \infty^{\pm r p \infty^{(-\alpha)}}$$

Propriedade nona

1 — A radiciação infinita e positiva, $p \infty^{\mu}$, duma quantidade, $b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}$, é uma quantidade de dimensão, $(\alpha - \mu)$,

$$\sqrt[p \infty^{\mu}]{b^{\pm m \frac{1}{\log_c b} \infty^{-\alpha}}} = b^{\pm \frac{m}{p} \frac{1}{\log_c b} \infty^{(\alpha + \mu)}}$$

2 — A radiciação infinita e positiva, $p \infty^{\mu}$, duma quantidade, $\infty^{\pm m \infty^{-\alpha}}$, é uma quantidade de dimensão, $(\alpha - \mu)$,

$$\sqrt[p \infty^{\mu}]{\infty^{\pm m \infty^{-\alpha}}} = \infty^{\pm \frac{m}{p} \infty^{-(\alpha + \mu)}}$$

(Continua)

Com a resposta do Eng.º Horácio de Moura ao Comentário sôbre o artigo «Fiscalização de Obras Públicas» do Eng.º Corrêa Guedes, encerra-se nas páginas da «Técnica» a polémica sôbre o assunto, visto que, como o notou no seu Comentário, o Eng.º Corrêa Guedes não tenciona acrescentar uma linha ao que escreveu.

A «Técnica» não cabe tomar posição ou partido sôbre a discussão e é esta uma das razões, entre outras, que nos levou a publicar o Comentário. Em todo o caso, julga-se conveniente salientar que as afirmações feitas nos artigos são da inteira responsabilidade dos autores e que, como se lhes notou, a questão está intimamente ligada à consciência profissional de cada um.

Merecem-nos, contudo, uma observação êstes artigos. Os Sr.s Eng.os Corrêa Guedes e Horácio de Moura expressam pùblicamente a sua consideração pela revista «Técnica»; agradecendo o intento, não cremos, porém, que tenham escolhido no modo como conduziram a discussão a melhor maneira de a evidenciar.

A Direcção da «Técnica»

COMENTÁRIO

(Sôbre o Curso "Fiscalisação de Obras Públicas")

PELO ENG.º CIVIL (U. P.) **HORÁCIO DE MOURA**

Sob êste título apareceu no último número da Técnica um escrito do Sr. Eng.º Júlio Corrêa Guedes que passo, embora vencendo certa contrariedade, a analisar:

Quem escreve para o público sugeita-se à crítica que, sendo conduzida com lealdade e saber, é constructiva; são condições essenciais dum crítico, o saber, a lealdade e a educação. Com êstes 3 predicados os comentários tornam-se interessantes e utilíssimos; concordo com o Sr. Eng.º C. G. quando diz que *que as polémicas são barulhentas e ôcas como tambores,* mas sómente quando elas são conduzidas como o fez S. Ex.ª.

O comentário do Sr. Eng.º C. G. encerra em si três características fundamentais: a preocupação de mostrar sabedoria, o excêntrico prazer de agravar o que devia respeitar e uma notável falta de aprumo, tudo misturado com uma vaidade que desconcerta.

Tais características, que quem quer poderá verificar lendo o comentário a que me refiro, são difíceis de juntar no mesmo escrito, e é de felicitar o Sr. Eng.º C. G. por tê-lo conseguido. A um comentário desta natureza não se responde em público, pois quem o lê nêle mesmo encontra a resposta que merece e rápidamente faz um juízo exacto do espírito alevantado do seu auctor.

A minha consideração pela *Técnica* e seus leitores, levou-me ao sacrifício de lêr e relêr a excelênte prosa do Sr. Eng.º C. G., cheia de qualidades excepcionais, para que bem lhe pudesse responder, não como merece, mas como devo.

Posto isto passo a analisar o escrito do Sr. Eng.º Corrêa Guedes:

Primeiro que tudo S. Ex.ª parece querer que todos possuam a sua infalibilidade e não admite que hajam passado lapsos nos meus

artigos, portanto a possibilidade duma corrigenda final: pois enganou-se, tôda a gente é falível (à excepção do Sr. Eng.º C. G.) e eu dos piores, e, embora contra a vontade de S. Ex.ª, na corrigenda que publicamos, lá encontrará o Sr. Eng.º C. G. alguns dos seus reparos. Talvez julgue que as emendas coincidentes com certos pontos por si focados, não seriam consideradas se tal não acontecesse; não pretendo roubar-lhe a ilusão, se ela lhe agrada, e passo a analisar o escrito de S. Ex.ª: Repara o Sr. Eng.º C. G. por eu dizer, quando me refiro ao alvaiade de chumbo, *requere 10 a 12 °/₀ de óleo, secando rápidamente;* e, a propósito, dá largas à sua sabedoria e quere dar-nos uma lição sôbre, o *poder absorvente.* Obrigado, mas confessamos sinceramente que não foram as explicações do Sr. Eng.º C. G. que vieram fazer perceber melhor, nem a mim nem aos leitores, que, quando digo que o alvaiade de chumbo requere 10 a 12 °/₀ de óleo, se depreende clara e simplesmente que tal quantidade de óleo se destina a formar pasta compacta. *Secando rápidamente,* digo eu, mas o Sr. Eng.º C. G. esclarece que não é o alvaiade de chumbo que seca, mas as tintas em cuja composição êle entra...

É incrível a explicação, salvo se o Sr. eng.º C. G. está a brincar connosco. Com respeito ao eu usar sempre a palavra *côr* em vez de *pigmento,* não é verdadeiro, pois eu uso *côr* e também uso *pigmento;* veja bem o Sr. eng.º C. G. De resto, vejamos o que diz o Sr. Dr. Cândido de Figueiredo; êste professor da nossa língua escreveu no seu dicionário: *côr — matéria colorante que se aplica em tintas.* Mas vamos adiante.

Sôbre o pretenso êrro que o Sr. eng.º C. G. aponta a seguir — *Branco de zinco, substituto do branco de chumbo...* direi simplesmente que sempre tenho ouvido referir que nos locais onde a atmosfera esteja contaminada e seja contra-indicado o branco de chumbo, se empregará o branco de zinco. Transcrevo, e no original para lhe não tirar nem pôr, do volume *Analyse et Essais des Materiaux de Construction* de J. Malette, chefe do laboratório de química da Escola Nacional de Pontes e Calçadas; *Blanc de zinc... c'est le produit qui remplace le plus souvent la céruse.* Onde é que está o êrro? Mas continuemos: Vem, a seguir, outro êrro indicado pelo Sr. Eng.º C. G., dizendo que o sulfato de zinco não serve para adulterar o óxido de zinco, pois nunca se adultera um pigmento com um sal solúvel. Mas pregunto: solúvel em quê? Solúvel, evidentemente, na água, mas não nos dissolventes normais das tintas. Continuo a transcrever J. Malette: *Les falsifications du blanc de zinc consistent en des addition de sulfate et carbonate de calcium, sulfates de zinc...*

A seguir o Sr. Eng.º C. G. numa lufada de ciência explica-nos o que vem a ser *poder cobridor por opacidade* e *poder cobridor em superfície.* De facto, quem ler o que escrevemos, sem a ênfase do Sr. Eng.º C. G., percebe perfeitamente o que se pretende, sem que lhe seja necessária a explicação das suas tintas padrões, brancas, escuras ou em xadrez.

Assegura, depois, o Sr. Eng.º C. G. que é grave incorrecção dizer que *o zinco poderá dar duas espécies de sais solúveis: sais em que desempenha o papel de base e compostos nos quais tem o papel dum ácido.* E entra novamente em elevadas considerações, não muito a propósito e de cuja exactidão duvido; isso, porém, não interessa, pois eu, ignorante, como poderei atrever-me a duvidar de S. Ex.ª?

Contudo, e só para que justifique a frase que escrevi, transcrevo, da tradução espanhola *Tratado de Química Analítica (Análisis Cualitativa),* do Doutor F. P. Treadwell, que foi professor de química analítica na Escola Politécnica de Zurich:

Los hidróxidos sódico y potásico precepitan hidróxido blanco gelatinoso:

$$\ddot{Zn} + 2\,OH' \rightarrow Zn(OH)_2$$

facilmente soluble en exceso de reactivo, formandose cincatos:

$$Zn(OH)_2 + OH' \rightarrow H_2O + \left(Zn\begin{matrix}O\\OH\end{matrix}\right)'$$

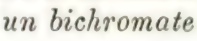
El hidróxido de cinc se comporta, por consiguiente lo mismo que el hidróxido alumí-

nico, no sólo como base, sino también como ácido debil.

E agora transcrevo de *Couleurs, Peintures et Vernis* de Desalme et Pierron, engenheiros químicos: *Le zinc peut donner deux sortes de sels solubles, des sels où il joue le rôle de base e des composés dans lesquels il remplit l'office d'un acide.* Diz ainda o Sr. Eng.º C. G. que a exemplificação que usei é infeliz; não digo que não, perante a esclarecida afirmação de S. Ex.ª, mas é a mesma que vem, a seguir ao que acima transcrevo e como sua seqüência, no livro citado, dos Srs. Densalme et Pierron.

Seguindo ainda o notável *comentário* do Sr. Eng.º C. G., vemos que referere sêr *impreciso,* o eu dizer que o podêr cobridor do do litopone não é de desprezar; agora o Sr. Eng.º C. G. torna-se *purista* da língua e quere-nos convencer que quando eu digo que *não é para desprezar* quero dizer pequeno... A seguir, o Sr. Eng.º C. G. desenvolve uma tirada científica, para nos justificar a fórmula química do verde Schweinfurth, provando assim que eu tinha errado a que escrevi; ora o Sr. Eng.º C. G. seria mais razoável se interpretasse as coisas com mais lealdade e se lembrasse, por exemplo, que a falta de um algarismo ou outro, poderia sêr um lapso da imprensa ou revisão, que, se fôsse encontrado pelo autor, viria emendado na errata. Depois diz o Sr. Eng.º C. G. que cometo uma imprecisão quando digo, a propósito ainda do verde Schweinfurth, que se trata duma côr vivíssima, muito resistente ao calor e à luz. Transcrevo do, já citado, livro de Desalme et Pierron que, a propósito do producto em vista, diz: *Couleur trés vive, résistant bien à la chaleur et à la lumiére, mais extrêmement venéneuse...* A seguir, diz-nos o Sr. Eng.º C. G. que cometo um êrro quando, ao falar do verde óxido de crómio, digo — *Sexquióxido de crómio* ($Cr^2\ 0^3$) *que se obtem ou calcinando o cromato de amónio ou de mercúrio ou ainda reduzindo um bicromato ou cromato alcalino.*

Perdõe-me S. Ex.ª se ouso justificar-me e se ouso mesmo pensar, quando o Sr. Eng.º C. G. diz — *como é elementar, uma redução pode transformar um composto noutro mas nunca um sal num óxido,* se um sal ou um óxido não serão ainda compostos. Sôbre o assunto vejamos o que diz o Doutor Treadwell na sua *Análisis Cualitativa: Los dicromatos alcalinos calentados fuertemente producen cromatos normales, óxido crómico y oxigeno:*



$$4\ K_2\ Cr_2\ O_7 \rightarrow 4\ K_2\ Cr\ O_4 + 2\ Cr_2\ O_3 + 3\ O_2$$

E agora de *Coulleurs, Peintures et vernis: On l'obtient, soit en calcinant le chromate d'ammonium ou le chromate de mercure, soit en réduisant un bichromate ou un chromate alcalin.*

A seguir vem a citação dum êrro, quando digo que o verde inglês, a que o Sr. Eng.º C. G. chama verde Brunswick, é bastante fraco sob a acção da da luz. Continuo a transcrever de Desalme et Pierron: *Les verts anglais ont une solidité à la lumiére trés faible.* E depois acusa o Sr. Eng.º C. G. mais uma imprecisão, quando digo que o mínio não conterá mais de 0,5 % de matérias insolúveis... É preciso já ter vontade de pegar; insolúveis, evidentemente, nos seus dissolventes usuais, nêste caso o ácido azótico diluído e um pouco de água assucarada. De resto, a imprecisão não é minha — transcrevo de *Analyse et essais des Matériaux* de Malette: *un bon miníum ne doit pas contenir plus de 0,5 % de matières insolubles e renferme de 25 a 30 % de peroxyde* Pb O_2. A seguir, passa o Sr. Eng.º C. G. a fazer agir mais rápidamente as suas qualidades de crítico e aponta outra incorrecção, quando digo que o azul ultramar é um composto sílico-argiloso e sulfo-sódico. Transcrevo Malette: *L'outremer est un composé silico-argileux et sulfosodique qui est trés employé en peinture.* Aponta, S. Ex.ª um êrro quando digo, a propósito do azul montanha, que é um sesquicarbonato de cobre natural. Transcrevo de Desalme et Pierron, que ao referir-se ao produto em causa, diz: *C'est un sesquicarbonato de cuivre naturel que l'on trouve en Sibérie...* Aponta S. Ex.ª mais uma incorrecção quando digo a propósito do azul de Saxe, que é um silicato duplo de cobalto e de potássio, obtido, fundindo em fornos apropriados uma mistura de 2

partes de areia, 1 parte de carbonato de potássio *e certa quantidade de arsénio-sulfureto de cobalto.* Transcrevo de Desalme et Pierron: *Ce produit (bleu de Saxe) est un verre à base de cobalt, c'est-á-dire un silicate double de cobalt et de potasse obtenu en faisant fondre au four de verrerie un mélange de sable (2 p), de carbonate de potasse (1 p.) e d'une quantité variable d'arsénio-sulfure de cobalt...*

S. Ex.ª aponta mais uma incorrecção, quando digo, a propósito do amarelo de crómio, que: esta côr é tanto mais escura, quanto maior fôr o seu teor em óxido de chumbo. Transcrevo de Malette, que diz a propósito do amarelo de crómio: *La couleur jaune est de plus en plus foncée suivant la teneur croissante en oxyde de plomb.* Mas S. Ex.ª continua a vêr mais imprecisões quando digo, ainda a propósito do amarelo de crómio, que a sua composição implica os inconvenientes dos sais de chumbo: enegrece rápidamente pelo hidrogénio sulfurado e é tóxico, sendo êste último inconveniente agravado pela presença do crómio. Transcreve de Desalme e Pierron, a propósito do produto em causa: *Leur composition, mélange de chromate de plomb et de sulfate de plomb: confère aux jaunes de chrome tous les inconvénients des sels de plomb: noircissement rapide par l'hydrogène sulfuré et surtout une trés grande toxité, encore exaltée par la présence du chrome.* Mas não fica por aqui o Sr. Eng.º C. G. e aponta mais uma incorrecção quando digo: Ocres amerelos. — Químicamente, silicatos de alumina mais ou menos complexos, corados pelo hidrato férrico; continuo a transcrever de Desalme et Pierron, a propósito dêste assunto: *Ce sont des argiles ou des silicates d'alumine, plus ou moins complexes, colorés par de l'hydrate ferrique.* E depois diz S. Ex.ª que sou impreciso quando digo, a propósito do amarelo de Março, que, químicamente, é constituído por alumina e hidrato férrico. Continuo a transcrever Desalme et Pierron: ... *Jaune de Mars et qui est constituée par de l'alumine et de l'hydrate ferrique.*

Ma novo êrro S. Ex.ª aponta quado digo, a propósito do amarelo de cadmio que: não misturaremos, contudo, estas côres com as de chumbo pois enegreceriam; evidentemente, conforme o caso se apresente.

Transcrevo Desalme et Pierron: *Comme le jaune de cadmium contient du souffre il faut éviter de le mélanger aux sels de plomb qui noirciraient à son contact ..*

No que diz respeito ao amarelo brilhante, transcrevo de Malette: *Le Jaune brillante (jaune de cadmium + blanc de plomb).*

Passa depois o Sr. Eng.º C. G. a comentar o que escrevi sobre óleos e aponta a primeira incorrecção ao dizer: quando o fervemos (o óleo de linhaça) com bióxido de manganésio e litargírio fica a designar-se, por óleo de linhaça fervido; passo a transcrever de J. Malette, que diz sôbre o assunto: *Quand on l'aportée á l'ébullition avec de la litharge e du bioxyde de manganèse on l'apelle huile de lin cuite.* Diz, a seguir, o Sr. Eng.º C. G. que não percebeu as definições que dei de índice de saponificação e de iodo; compreendo, muitas vêzes quem sabe muito têm essas excentricidades de não perceber o que só entendem as pessoas vulgares. E, finalmente, diz o Sr. Eng.º C. G. que uma série de reacções que indico para detecção dos adulterantes do óleo de linhaça, são falíveis; está dominado pela infalibilidade, o Sr. Eng.º C. G....

E S. Ex.ª passa ao capítulo de *Essências* onde, só citando as principais faltas, começa por dizer que cometo um êrro extraordinário, quando refiro: (escrevo a frase rectificada pela corrigenda que, de resto, em nada lhe modificou a essência) que os ácidos seus componentes (da colofónia) são compostos não saturados que devem possuir duas duplas ligações, pois fixam 160 % do seu pêso de iodo, correspondentes a quatro átomos, se admitirmos a fórmula $C^{20} H^{28} O^{2}$. Transcrevo Desalme et Pierron: *Les acides qui la composent sont des composés non saturés: ils atirent l'oxygéne de l'air et le fixent assez rapidement en se colorant de plus en plus en jaune. Ils doivent posséder deux doubles liaisons, car ils fixent 160 % d'iode, c'est-à-dire sensiblement 4 atomes d'iode si l'on admet la formule* $C^{20} H^{28} O^{2}$. A seguir outro êrro extraordinário quando digo (corrijo a troca de letras, conforme vem na errata), ao falar da essência de terebintina

— Ela é constituída, na sua quási totalidade, por um hidrocarboneto, o terebenteno e apresenta um poder rotatório diferente, conforme a origem da essência. Transcrevo de Desalme et Pierron: *L'essence de terébenthine bout entre 156° e 161°. Elle constituée en presque totalité, par un hydrocarbure, le pinéne (appellé aussi térébenthène) et qui presente un pouvoir rotatoire différent, suivant l'origine de l'essence.*

E, finalmente, anota uma imprecisão quando digo, do *white spirit* — essência de petróleo cuja densidade varia entre 0,773 e 0,795, destila entre 190° e 200°; só se fôr porque a frase saíu sem o *entre*... mas isto é que se chama pescar nas águas turvas...

Acaba o Sr. C. G. por dizer que o capítulo — Secantes — é mais infeliz de que qualquer dos outros e no de Vernizes, assinala três imprecisões, seis incorrecções e um êrro, mas não diz onde. Todos os pontos que foram objecto da elevada crítica de S. Ex.ª e a que não faço referência, são lapsos de imprensa ou da minha revisão, que vêm corrigidos na errata.

E estamos quási no fim da resposta a êste triste comentário, cuja recordação procurarei varrer da memória.

O Sr Eng.º C. G. chama curso aos meus apontamentos; mas, por amor de Deus, S. Ex.ª confunde as minhas aspirações com as suas. Veja S. Ex.ª que deixei bem claro em tais artigos o fim a que êles se destinavam e quão despretenciosos eram; não temo a crítica honesta e construtiva, pelo contrário, aceito-a com alegria e confessarei as minhas faltas, onde as haja, com lealdade e sem vergonha. Escrevi os meus artigos com honestidade, pois quem faz o que pode, a mais não é obrigado.

Finalmente quero ainda referir-me à afirmação do Sr. Eng.º Correia Guedes, quanto às revistas portuguesas de engenharia: não desconhece S. Ex.ª que existem no nosso País, além da «Técnica», que aliás todos respeitam e estimam, mais duas revistas de engenharia — «A Revista da Faculdade de Engenharia» e a da «Ordem dos Engenheiros».

O Sr. Eng.º C. G. dizendo que a «Técnica» é a única revista de engenharia digna dêsse nome, que existe em Portugal, assume perante estas duas revistas uma atitude bastante melindrosa e deselegante.

A revista da Faculdade de Engenharia, de nobres tradições e onde têm colaborado e colaboram nomes prestigiosos, deve o Sr. Eng.º C. G., respeito. A revista da Ordem dos Engenheiros, é o órgão da sua classe, classe onde o Sr. Eng.º C. G. acaba de entrar e já deslustra; a apreciação dêste assunto cabe, contudo, ao Douto Conselho da Ordem e eu simplesmente direi que me parece absurdo um indivíduo rebaixar o que devia elevar, pelo prazer de se inferiorizar a si mesmo.

Ao papel que o Sr. Eng.º C. G. desempenhou com o seu comentário, chama S. Ex.ª antipático e desagradável; ainda nestas palavras há um pouco da sua característica vaidade. De facto, o seu papel nem é antipático nem desagradável, é simplesmente triste.

E, para terminar, gostaria de saber se o Sr. Eng.º C. G. em vez de meditar na complexidade da natureza humana, medita, finalmente, na complexidade da sua própria natureza...

Fevereiro de 1945.

Corrigenda referente aos artigos "Fiscalização de Obras Públicas" publicados nos números 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151 e 152

Apesar da revisão feita pelo autor escaparam vários lapsos, dos quais emendamos os seguintes:

Página	Colunas	Linhas	Onde se lê	Deve ler-se
488	1.ª	6 e 43	batólitos — separações	batílitos — incrustações
490	2.ª	29	$C\ O^3\ Ca\ O\ H^2\ C\ O^2 \rightarrow$	$CO^3Ca + OH^2 + CO^2 \rightarrow$
492	2.ª	2, 3, 4 e 5	1,1 m/m 0,5 » 0,5 » a 0,25 m/m 0,25 »	$>$1,1 m/m $>$0,5 » 0,5 » a 0,25 m/m $<$ 0,25 »
535	2.ª	9	Sucessivamente	raramente
541	1.ª	10, 12 e 18	— Abaixo de 45 cm. — 1,20 — dá a mão de obra exigida	— abaixo de 45 cm de espessura — 1,05 dá os materiais e mão de obra exigidos
542	1.ª e 2.ª	27 e 32	relativamente ao aparelho turba	relativamente ao assentamento turfa
	QUADRO			
	1.ª e 5.ª	11	1 m^2 0,35	1 m^3 0,20
543	1.ª	20	prêsa	aderência
	2.ª	25 e 26	Kc = = 140 kg/cm^2	$K_c > 140$ kg/cm^2
544	1.ª	24	molhada	moldada
545	2.ª	18 e 19	500 kg e à tracção de 32 quilos	500 kg/cm^2 e à tracção de 32 kg/cm^2
546	2.ª	28, 29 e 37	à superfície durante a seca — deposita algumas vezes certa — Senocrit	pela superfície durante a seca deposita certa — Snowcrete
548	2.ª	8	K = 100 a 100	K = 100 a 150
551	1.ª	23	Sulfato	Sulfito
	2.ª	22 e 27	vitríolo à água — ferrocianato	vitríolo verde à água — ferrocianeto
552	1.ª	18	Si Ca	$Si\ O_3\ Ca$
552 e 553	2.ª e 1.ª	44 e 7	cloreto de magnésia	cloreto de magnésio
577	1.ª	6	terrosos	ferrosos

Página	Colunas	Linhas	Onde se lê	Deve ler-se
577	2.ª	33 e 34	constituem — de dissolução	contéem — da solução
578	1.ª e 2.ª	8 e 40	$0{,}23 \times 0{,}19 \times 0{,}06$	$0{,}23 \times 0{,}11 \times 0{,}06$
			esta que pesa	esta alvenaria que pesa
644	2.ª	17	dissolução	solução
645	1.ª	24	$CO_2 + HO \rightarrow C\,H\,O\,H + O_2$	$CO_2 + H_2O \rightarrow C\,H\,O\,H + O_2$
646	1.ª	19	plátano, acácia, tília, etc.	plátano, tília, etc.
647	1.ª	15 e 17	0,15 % 10 %	0,20 % 8,06 %
	QUADRO 5.ª		118.000	108.000
648	QUADRO 11.ª		0,0000035	0,00000035
649	6.ª	8, 10 e 14	Semi-dura, branda, branda	dura, semi-dnra, semi-dura
652	1.ª	35	antiscepticidas, (coprimol, carbonil, etc.)	insecticidas (cuprinol, carbonilo, etc.)
653	1.ª e 2.ª	51 e 1	semi-dura,	branda, mas
655	2.ª	5	maior área → $h = r\sqrt{2}$	maior área → $a = r\sqrt{2}$
		4 e 7	$\frac{e}{a} = \frac{m}{m}$ $a : \frac{e}{a}\sqrt{} = \frac{m}{m}$	$\frac{e}{a} = \frac{m}{n}$
		11	$l = 0{,}7\ a$	$e = 0{,}7\ a$
706	2.ª	46	magnésio	manganésio
707	2.ª	4, 10 e 19	45 kg/cm² — carbonato	45 kg/mm² — carboneto
708	1.ª	15	sílico	silício
708 e 709	1.ª	17 e 24	magnésio	manganésio
710	2.ª	35	1/2	5 1/2
712	1.ª	15	18	1,8
713	1.ª	6	5 kg	25 kg
714	1.ª	7 e 8	3 e 5 0,0015	0,5 e 3 0,015
	2.ª	4, 8, 24 e 33	maganésio	— manganésio
			0,260	0,126
			— a conductibilidade térmica é igual a 11	o coeficiente de conductibilidade térmica entre 0° e 100° é igual a 45
758	2.ª	18	deslocação	destilação
760	2.ª	6	ripas	fôlhas
766	2.ª	35	magnésio	manganésio
821	1.ª	11	no máximo	em média
822	1.ª	19 e 20	magnésio, potássio, sódio	magnésia, potassa, soda
823	1.ª	11 e 14	— hidrato de cal — ou o aluminato de cálcio	— hidróxido de cálcio — ou o sílico — aluminato de cálcio
	2.ª	20, 28 e 35	250 l. 100 m³ 170 l.	450 l. 1m³ 300 l.
825	1.ª	18	sulfato de cal	sulfato de cálcio

Página	Colunas	Linhas	Onde se lê	Deve ler-se
826	2.ª	31	o magnésio	a magnésia
828	1.ª	14	e à formação de silicatos e aluminatos	e da formação de silicatos e aluminatos de cálcio hidratados em
829	1.ª e 2.ª	21 e 5	magnésio	magnésia
830	2.ª	10	com faces	com paredes
831	1.ª	28	magnésio	magnésia
	QUADRO		Falta acrescentar uma coluna com as compacidades: 2,45 — 1,26 — 0,93 e 0,80	
883	1.ª	17	4 CaO, Al^2C^3, Fe^2O^3	4 CaO,Al^2O^3,Fe^2O^3
885	1.ª	5 e 6	magnésio - potássio - sódio	magnésia — potassa — soda
891	1.ª	39	300 kg com brita corrigida	325 kg, corrigida
964	1.ª	41	daquêle produto	dêste produto
966	1.ª	27	do enxôfre	do ácido sulfídrico
	2.ª	39	o cartão depois de	o cartão para ser
968	1.ª	42 e 43	o produto contém impurezas, enegrece	o ambiente contém certas impurezas, o produto enegrece
969	1.ª	7	amoníaco	amónio
970	1.ª	41	CH_3-CO-O / CH_3-CO-O > Cu, 3 CuASO	CH_3-CO-O / CH_3-CO-O > Cu, 3 Cu AS^2O^4
	2.ª	8, 14 e 26	amoníaco — $(As\ O^3)^2\ Cu^2$ — dissolução	amonia — $(AsO^3)^2\ Cu^3$ — solução
971	1.ª	4	$Cr^2O^7K^2$ + I 6 Bo (OH^3) →	$Cr^2O^7K^2$ + 16 Bo $(OH)^3$ →
		22 e 30	dissolução — amoníaco	solução — amónio
1015	1.ª	11	Fe (C N)^6 Fe^4	[Fe (C N)^6]^3 Fe^4
	1.ª e 2.ª	22 e 15	amoníaco — dissolução	amónio — solução
1016	2.ª	27 e 28	magnésio e ocre	manganésio e côr
1017	1.ª	23	— C r O S r	C r O^4 S r
		34 e 41	antes — de cal	durante — de cálcio
1018	1.ª	3	somba, ou terra de somba	sombra, ou terra de sombra
		7, 8 e 9	magnésio	manganésio
		17	dissolução	solução
1019		43 e 44	a percentagem de iodo que contenham	o seu índice de iodo
1021	1.ª	33	dissolução	solução
	2.ª	20 e 21	160 % de iodo, ou sejam 4 átomos, se admitirmos a fórmula $C^{20}\ H^{22}\ O^2$	160 % do seu pêso de iodo, correspondente a 4 átomos, se admitirmos a fórmula $C^{20}H^{28}O^2$
		33	a terebintina que	o terebenteno e

Página	Colunas	Linhas	Onde se lê	Deve ler-se
1022	1.ª	36	destila 190° e 200°	destila entre 190° e 200°
	1.ª e 2.ª	46 e 23	magnésio — côres	manganésio — ocres
1023	1.ª	3 e 5	encontra ao longo	encontra à superfície do mar ao longo
			transparente, branca, parda ou	transparente por vezes branca opaca ou
	2.ª	39	ficarem turvos	ficarem, por vezes, turvos
1024	1.ª	7	2/5 de ácido gordo	3/5 de ácidos gordos
1025	2.ª	4 e 5	óleo de madeira	óleo de madeira (de Chine, Wood oil)
		22	etílico e acetato de amilo	etílico, acetato de amilo, etc.
1026	2.ª	48 e 51	(Carbonato duplo de sódio e potássio, a vulgar pedra pomes) — pedra pomes	(sulfato duplo alúmino-potássico) — alumen
20	1.ª e 2.ª	22, 3, 22 e 38	dissolução	solução
21	1.ª e 2.ª	4 e 37	silicato — zumatite	silica — zumatique
24	2.ª	11	carvão	zarcão
27	2.ª	22	litros	libras
97	1.ª	35 e 41	75,00 kg e 0,15 l.	7,5 kg e 1,15 l.
99	2.ª	7	$Fe\ O_3$	$Fe_2\ O_3$
100	1.ª	9	substâncias mais ou menos sólidas	substâncias sólidas
106	2.ª	42	bóricas	básicas
107	1.ª	11	lentes fotográficas	filtros fotográficos
		16 e 24	cálcio	cal
		31	das côres	das côres, muito baixo
	2.ª	46	35 a 105,10^7	35 a 105 . 10^{-7}
108	2.ª	14	a 493	a 403
	QUADRO			
	2.ª		0,94 × 0,61	0,87 × 0,61
179	1.ª	35	1 kg/cm²	1 kg/m²
181	1.ª	35	cimentel	cimentol

DO MUNDO TÉCNICO

Algumas notas sôbre a precipitação electrostática

Por H. E. HERTLER

A idéia de usar um meio electrostático para a captação de finas partículas dos gases é muita antiga. A aplicação de um forte campo electrostático, acompanhado por uma descarga de corona para a limpeza dos gases, foi primeiro demonstrado por Hohfeld em 1824 e as suas observações foram continuadas em 1844 por Sir Oliver Lodge, que montou uma instalação numa fundição de chumbo, na Escócia, Mais tarde estas observações foram novamente aplicadas pelo Dr. Cottrel em 1905, que dirigiu o desenvolvimento do processo de precipitação electrostática com o fim de separar os sólidos e líquidos, dos gases.

O princípio fundamental, no qual êste processo se funda, é o seguinte. Os gases, dos quais se deseja separar os sólidos e os líquidos, passam por uma câmara em que estão montadas, em paralelo e verticalmente, um certo número de tubos. O diâmetro dos tubos varia de 6 a 10 polegadas (152 mm a 254 mm) e o seu comprimento de 10 a 14 pés (3 m a 4,30), conforme a natureza do gás.

No centro de cada tubo está suspenso um eléctrodo, constituído por um único fio delgado ou varão. Os varões ou os fios estão ligados à corrente contínua, de alta tensão (30.000 a 80.000 volts) e os tubos estão ligados à terra, de modo que há uma elevada diferença de potencial entre o varão ou fio (eléctrodo de descarga) e o tubo (eléctrodo receptor).

A voltagem aplicada é suficiente para provocar uma descarga de corona. Os electrões, neste campo, adquirem tal velocidade que dividem as moléculas do gás em iões positivos e iões adicionais. Estes iões adicionais dirigem-se para o eléctrodo positivo, sendo captados, na passagem, pelas partículas sólidas que assim se electrizam negativamente.

As partículas electrizadas são atraídas para o solo positivo, (eléctrodo colector) sôbre o qual aderem com considerável fôrça. Aqui elas libertam os iões que captaram e agora mantem-se agarradas, à superfície do eléctrodo, por adesão.

Para remover as partículas agarradas aos tubos utilizam-se raspadores mecânicos. No caso de líquidos, estes naturalmente escorregarão pelos tubos. Uma tremonha adequada está montada por baixo dos tubos, de modo que o material é fàcilmente apanhado.

Pelo que acima se disse, parece que qualquer tipo de despoeirador se poderia empregar para todos os casos, mas isto está longe de ser exacto. O tamanho e a natureza das partículas é da maior importância, como mostra o exame dum combustível pulverizado (carvão). Uma grande proporção dêste pulverizado compõe-se de esferas ôcas; vazio êste provocado pela formação de gás no interior da pequena partícula de carvão, o qual sai para o exterior através dum pequeno furo.

Por conseguinte estas esferas são muito leves e da difícil captação, como também por exemplo, as partículas da poeira de cimento.

A temperatura do gás deve ser cuidadosamente observada. Uma instalação dêste tipo foi montada pela firma Sturtevant Enginiernig Co. Ltd.ª com maior sucesso para captação de pirites do gás, a uma temperatura de 500° C.

A umidade do gás também tem de ser observada, embora um gás sêco tenha um poder dieléctrico mais elevado que um gás úmido, é vulgar haver perturbações com um gás sêco. Por isso algumas vezes torna-se necessário umedecer o gás antes de entrar no despoeirador.

.....

Êste processo de despoeiramento pode-se aplicar para captação de poeiras dos gases dos fornos de cimento e cal, limpeza dos gases dos fornos de pirite e dos gases das centrais geradoras de energia eléctrica, etc.

Um exemplo da aplicação dêste processo na limpeza dos gases da Central Geradora Freemans Meadono:

Combustível consumido	11.800 kg/hora
Vapor consumido	79.380 » »
Volume de gás	2.660 m 3/minuto
Poeira entrada no despoeirador...	950 kg/hora
Poeira recuperada	930 » »
Rendimento	97,8 %

(The Electrical Engineer n.º 14-Vol. VI)

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

O Antracolítico Continental Português

Por CARLOS TEIXEIRA

Dissertação do doutoramento em Ciências Histórico-Naturais apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto

Depositária: Pôrto-Editora, Prêço 50$00

Nêste trabalho faz-se a revisão da estratigrafia do Antracolítico continental português em face dos dados paleontológicos estudados pelo A. e procura-se enquadrá-lo no Antracolítico do Continente Norte-Atlântico.

Dá, o A., uma análise crítica dos trabalhos publicados que nos conduz à exposição dos conhecimentos obtidos quando o A. iniciou os seus estudos do Antracolítico, especialmente continental. Põe em relêvo as contribuïções de Daniel Sharpe, de Carlos Ribeiro, Bernardino A. Gomes e Wenceslau de Lima.

Analisa a flora do Antracolítico marinho em que distingue, ao lado de uma flora com características moscovianas de possível paralelismo com a flora vestefaliana de Santa Suzana, uma outra mais antiga do Viseano que permite concluir, no quadro geral hispano-marroquino, da existência de terras emersas desde o Carbónico inf.

O estudo do Antracolítico continental ocupa três capítulos. É nêstes que se pode apreciar melhor a enorme contribuïção do A. para o conhecimento das flora e fauna antracolíticas, já pela revisão das determinações de W. de Lima e de outros que o precederam, já pela apresentação de numerosas espécies, umas novas no nosso País e outras novas para a ciência paleontológica.

No capítulo dedicado ao Vestefaliano, estuda os afloramentos de Santa Suzana, cuja faunula foi descoberta e estudada pelo A., e os afloramentos de Ervedosa e São-Félix de Laundos. A existência do Vestefaliano no norte do País, embora já admitida, foi só com os estudos do A. que ficou definitivamente comprovada.

O A., que classifica no Vestefaliano D todos êstes afloramentos mercê dos abundantes dados paleontológicos estudados, manifesta, contudo a opinião de que o da Santa Suzana será autoctono e o do Norte aloctono.

Procura paralelizá-los com o Vestefaliano do Continente Norte-Atlântico pela flora, quer ainda, pela fauna, e faz notar que o paralelismo com as formações espanholas deve ser tomado com reserva dado o atrazo do estudo dêstes terrenos em Espanha.

São as formações estefanianas que mais detalhadamente o A. tem pesquizado; assim a lista das espécies florísticas atinge um elevado número, permitindo classificar o afloramento, que se estende desde o Pôrto até além de Castro Daire, na parte superior do Estefaniano médio e, talvez, englobando parte do Estefaniano sup.

A fauna, que se apresenta também abundante (insectos filópodes e bivalves), foi citada por Wattison e estudada por W. Hind (bivalves), pelo Prof. Fleury (insectos), a que depois o A. juntou numerosos insectos e alguns filópodes. Apresenta o A., aqui as razões que o levam a discordar das determinações de Hind, que classificara os exemplares enviados por Wattison como vestefalianos, e indica que deverão antes ser estefanianos.

As espécies animais estudadas pelo A., embora numerosas, não permitem tirar conclusões estratigráficas, pois que são formas regionais ou formas de larga repartição vertical; todavia, não vão contra as conclusões dadas pela flora.

Estuda, ainda, o Estefaniano português dentro do Antracolítico norte-atlântico e faz reservas quanto ao paralelismo com o espanhol.

No estudo da flora do Buçaco põe em evidência as analogias com a do Norte por um conjunto de espécies do Estefaniano sup. que passam ao Pérmico e o aparecimento de novas espécies lípicas do Pérmico inf., que o levam a confirmar a classificação de W. de Lima, e colocar êste afloramento no Autuniano inf.

A fauna, infelizmente, até hoje deu sòmente duas espécies sem valor estratigráfico.

Analiza a formação pérmica do Buçaco no quadro geral do Pérmico norte-atlântico e aponta as dificuldades existentes no paralelismo com o da América do Norte.

Refere-se, o A., ao Antracolítico marinho do Sul e analiza criticamente os conhecimentos alcançados e nota a necessidade de se retomar o estudo sistemático de tão expensa zona; opinando que se deve procurar o paralelismo com as formações da África do Norte. Em face dos conhecimentos já adquiridos supõe a existência do Turnèsiano sup., Viseano sup., Namuriano e Moscoviano, que o A. pensa não estar totalmente representado mal grado a espessura atribuída a êste, admite, contudo, que as últimas camadas sejam paralelisadas com as do Vestefaliano de Santa Suzana e do Norte.

No estudo da evolução paleogeográfica e tectónica admite que no fim do Devónico grande parte do território português estava definitivamente emerso, o que explica a falta do Turnèsiano inf. e a limitação do mar do Turnèsiano sup. a um pequeno golfo na região da Carrapateira; atingindo o máximo desta regressão no Viseano inf, segue-se uma transgressão no Viseano sup., continuada no Namuriano e Moscoviano, sendo só

no fim dêste que nova regressão se verifica relacionada, pelo A., com os movimentos da fase astúrica.

Deposita-se, depois, o Estefaniano em bacias límnicas e a explicação para o facto de o Autuniano não aparecer em sucessão regular e isolado das outras formações antracolíticas encontra-a o A. nos movimentos da fase urálica. O Autuniano será limitado pela fase saálica, com que o A. faz terminar os paroxismos da orogenía herciniana no nosso País.

Admite um clima quente e úmido durante o Vestefalo-Estefaniano e um clima árido durante o Autuniano que se prolongaria ao Triássico, baseando-se nos caracteres litológicos das formações e nos conjuntos florísticos e faunísticos.

Analiza, ainda, a orogenía herciniana peninsular no quadro mais vasto da Norte-Atlântica e discute o problema das instruções magmáticas, de que só admite as graníticas relacionadas com esta orogenía.

Não queremos deixar de referir a numerosa documentação gráfica, que representa escolhidos exemplares da fauna e flora antracolítica, que sabemos ser trabalho do A., e a extensa bibliografia citada que separou em bibliografia referente a Portugal e bibliografia geral, pelo valor que tais contribuïções têm em trabalhos desta índole.

Diz o A. no Prefácio que o presente trabalho será uma introdução a outro de maior tomo que tem em publicação sôbre a Paleontologia antracolítica portuguêsa; poderia dizer também, que é uma *mise au point* do enorme esfôrço que o A. realizou e que entendeu, e muito bem, ir dando à publicidade dia a dia.

Queremos pôr em relêvo a atitude do A., que procurou na doutoração o coroamento dum extenso e valioso trabalho de anos e não, como é costume muito espalhado, escrever apenas uma tese para se doutorar.

A «Técnica» agradece a oferta com que o A. a quis distinguir.

D. T.

BIBLIOGRAFIA

Olives y Burdils — La Industria Electrica en España — 180$00.

P. L. Nebrera — Armamento de Aviación — 300$00.

A. Colino — Curso de Radioelectricidad — 216$00.

P. Karrer — Tratado de Química Orgánica — 360$00.

L. Gattermann — Prácticas de Química Orgánica — 135$00

Martinez Vivas — Pólvoras y Explosivos Modernos 4.º tomo — 240$00.

Carlos F. Casado — Cálculo de Estructuras Reticulares — 192$00

José G. Navarro — Saltos de Agua y Presas de Embalse 1.º Tomo — 420$00.

M. Kraemer — Motores de Explosión Diesel y Semi-Diesel — 135$00.

J. Monteiro Filho — Projecto de Estradas, 1.º Vol. — 280$00.

A T. Witts — El receptor Superheterodino de Rádio y de Televisión — 75$00.

Carl Harrington — Mill and Factory Book of Tool Care — 50$00.

C. M. Beadnell — Dictionary of Scientific Terms — 40$00.

Gustavo Mie — Tratado de Electricidad y Magnetismo — 210$00.

G. A. Boutry — Phénomènes Photoélectriques e Leurs Applications — 130$00.

Renato Andrade — Conheça seu Rádio — 40$00.

Junius D. Edwards — Chemical Engineering Series-The Aluminum Industry 2 Vols — 603$00.

W. B. Boast — Illumination Engineering — 141$00.

Daniels-Williams — Experimental Physical Chemistry — 165$00.

William Nelson — Seaplane Design — 190$50.

Steiner — Oil Burner Service Manual — 187$00.

Kolthoff-Lingane — Polarography — 275$00.

Rádio Enciclopédia:

1 — Principios Radiolectricos — 21$00.

2 — Electricidad Dinamica y Estatica — 21$00.

3 — Tipos de Corriente — 21$00.

4 — Detección por cristal y por Diodo — 21$00.

5 Transformadores y Auto-Transformadores — 21$00.

6 — Radiotelegrafia y Radiotelefonia — 21$00.

7 — Funcionamiento de los Radio-Receptores — 21$00.

8 — Ley de Ohm Circuitos Fundamentales — 21$00.

9 — Antenas Receptoras y de Transmision — 21$00

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Não periódicos

Formação dos terraços interglaciários do norte de Portugal e suas relações com os problemas da época glaciária, pelo Dr. Hermann Lautensach, publicação da Sociedade Geológica de Portugal.

Águas de Portugal, pelo Eng.º Acciaiuolli, Vol, II e III — Direcção Geral de Minas e Serviços Geológicos.

Companhia das Águas de Lisboa — **Relatório das Obras de Abastecimento de Água à Cidade** — 1942 e 1943.

Obras Públicas — Edição do S. P. N.

Periódicas

ARGENTINA

BOLETIM DO INSTITUTO ARGENTINO DE RACIONALIZACIÓN DE MATERIALES — Outubro e Novembro de 1944.

LA INGENIERIA — Agôsto de 1944.

BRASIL

REVISTA DO CLUB DE ENGENHARIA — Setembro de 1944.

CHILE

REVISTA DE CAMINOS — Maio e Junho de 1944.

TORQUE — Junho de 1944

ESPANHA

ARBOR — N.os 4 e 5

DYNA — Janeiro de 1945.

CEMENTO — Janeiro de 1945.

INVÉSTIGACIÓN Y PROGRESO — Julho-Agôsto e Setembro-Outubro de 1944.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS — Janeiro de 1945.

PORTUGAL

AFINIDADES — N.os 4 e 5

AGROS — Janeiro a Fevereiro de 1944

BROTÉRIA — Janeiro de 1945.

BOLETIM DA JUNTA NACIONAL DE CORTIÇA — Janeiro de 1945.

BOLETIM DA MOCIDADE PORTUGUESA N.º 1, vol V, 1945.

ESTUDOS — Fasc. I, 1945.

GAZETA DE MATEMÁTICA — Dezembro de 1944.

GAZETA DOS CAMINHOS DE FERRO — N.os 1369 e 1370.

GIL VICENTE — Novembro e Dezembro de 1944.

INDÚSTRIA PORTUGUESA — Janeiro de 1945.

CLÍNICA, HIGIENE E HIDROLOGIA — Dezembro de 1944.

O INSTITUTO — 1944.

OCIDENTE — Janeiro de 1945.

REVISTA DE ARTILHARIA — Janeiro de 1945.

REVISTA DA ORDEM DOS ENGENHEIROS — Janeiro de 1945.

SEARA NOVA — N.os 908 a 912.

ERRATA

Unidades Logarítmicas

«Técnica» N.º 151 · Dezembro - 1944

Página	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
67	Nota (3)	$\lvert Z \rvert$	$\lvert Z \rvert$
69	13	Resumo dos factores em conversão	Resumo dos factores de conversão
70	12	$P_1 \mid P_2 = (I_1 \mid I_2)^2$	$P_1 / P_2 = (I_1 / I_2)^2$
70	Nota (2)	$\log_{10} = 0{,}2 = 1{,}3$	$\log_{10} = 0{,}2 = \bar{1}{,}3$
71	28	$E_2 = \sqrt{2\,W + 5000}\,\square$	$E_2 = \sqrt{2\,W \times 5000}\,\square$
72	3	$P = (1/10^{-6})\,\omega$	$P = (1/10^{6})\,\omega$
72	20	Unidades de volume ou de potências (Volume escrito V_u)	Unidades de volume ou de potência (Volume unit V_u)
77	2	Dado: Relações de { tensão / potência	Relações de { tensões / potências
81	2.ª tabela (4.ª coluna)	q p 10,00	d b 20,00

001.8 Ciência e indústria

La investigacion tecnologia y el progresso industrial — *P. Brunengo.*

La ingenieria, Agôsto, n.º 838, pág. 587.

Origem industrial da ciência e suas influências recíprocas. Os institutos de investigação tecnológica e as directivas que os devem orientar.

339.3 : 725.22 Economia

Critério de valuacion de imuebles aplicadas en Juicios de expropiacion - *S. V. Noailles.*

Avaliação de um edifício de escritórios e habitação.

378 : 62 Ensino de engenharia

Para a defesa do Título de Engenheiro — *A. Almeida Garret.*

Técnica, n.º 152, Janeiro, 1945, pág. 137.

A insuficiência numérica de Assistentes e dos métodos no ensino de Engenharia em Portugal.

511 Aritmética

A aritmética racional — *A. Monteiro e J. Silva Paulo.*

Gazeta de Matemática, n.º 21, pág. 12.

A noção de número inteiro desde os primitivos a Descartes; a aritmética nacional: o cepticismo. Tendências modernas.

517.5 Séries

Uma teoria das séries duplas — *J. Albuquerque*

Gazeta de Matemática, n.º 21, pág. 1.

História, critério geral de convergência, comparação de séries; condição de convergência das séries duplas de termos reais de qualquer sinal.

531.75 Medição de grandezas

Picnometria de precisão, aplicável a sólidos, líquidos e soluções — *T. Batueca.*

Investigacion y Progresso, ano xv, pág. 281.

Método picrométrico com a precisão de 0,00001 g/m/ a 0,002 g/m/ conforme as substâncias analisadas.

539.3 Fotoelasticidade

Resolução experimental de um problema de resistência de materiales — *L. Villena.*

Investigacion y progresso, Ano xv, pág. 234.

Aplicação dum método fotoelástico a um sistema de vigas cruzadas consistindo na substituïção do modêlo por outros, conservando a mesma projecção horizontal mas dispostas em alturas diferentes. 7 cit. Bibliog. 19 fotos e esquemas.

551.1 Geologia

Nueva hipótesis de la formacion tectónica de Los Picos de Europa — *F. H. Pacheco.*

Investigacion y progresso, Ano xv, pág. 215.

553.3/6 Geologia económica

El carbon mineral y el hierro en China — *Dr. Karl Krejci-Graft.*

Investigacion y Progresso, Ano xv, págs. (227/271).

A produção de coque nas regiões ocupadas pelo Japão e os jazigos de hematite e magnetite na China. Processos primitivos ainda usados para a obtenção do ferro.

621.18 : 663.63 Máquinas

Depuracion del agua de alimentacion de generadores de vapor — *J. G Beobide.*

Dyna, Año 20, n.º 1, pág. 1

Eliminação das matérias orgânicas, coloïdes, óleos, silica, etc., desgasificação.

621.3

La electrificacion Madrid — Avila y Villalba — Segovia — *J. M. O. Gattel.*

Revista de Obras Públicas, Ano xcii, n.º 2756 (1-12 944), pág. 621.

Continuação da descrição em pormenor das subestações; esquemas das ligações dos circuitos de correntes, alterna e contínua. 7 fotos.

621.316 Distribuïção de energia eléctrica

El suministro de energia eléctrica em Madrid — *R. Spottorno e M. de Lara.*

Revista de Obras Públicas, Ano xciii. Jan. 1945, pág. 48.

621.438 Turbinas

La Turbina de gás — *J. M. Tena*

Dyna, Ano 20; N.º 1, pág. 10.

História e aplicações.

623.42 Construção de armamento

Buecas de frego autosunchados *(I. Sanguinetti).*

La Ingenieria, Agôsto 1944, n.º 838, pág. 570.

Submissão da bôca de fogo a uma pressão interna capaz de a deformar permanentemente sob a acção das tensões que a originaram. Tabelas e diagramas.

624.067.2 Técnica de betonagem

Algunos detalles de la construccion de arcos de hormigon en masa — *M. V. Pardal*

Revista de Obras Públicas, ano XCII, n.º 2756 (1-12-944), pág. 619.

Tomando certas precauções durante a betonagem dos arcos ou estudando a dosagem aplicável pode evitar-se o aparecimento de fendas no fecho. Fotografias e esquemas de arcos no canal de Taibilla.

625.11 Caminhos de ferro

Enlaces ferroviários — *M. Lamana.*

Revista de Obras Públicas, ano XCII. Janeiro 1945, pág. 63.

História e situação actual das ligações ferroviárias madrilenas. Mapas e perfis.

625.4

El metropolitano de Madrid — *M. Otamendi.*

Revista de Obras Públicas, ano XCIII. Janeiro 1945, pág. 55.

História e descrição das instalações.

625.62

Los nuevos tranvias de Barcelona — *I. T. Esteve*

Dyna, ano 20, n.º 1, pág. 15.

625.72 Curvas de transição

Sustitucion en carreteras de la curva de transicion teórica por una curva circular de enlace — *A. L. de la Viña.*

Revista de Obras Públicas, ano XCII, n.º 2756 (1-11-944), pág. 644.

Determinação do raio da curva circular mais conveniente cujo desvio da curva teórica de transição é mínimo. Valor máximo dêsse desvio para a curva achada.

625.72 Estradas

La homogeneidad en el trazado de caminos — *A. B. Ferreyra.*

Revista de Caninos, Maio 1944.

Características do veículo. O traçado lei da homogeneidade, velocidade nas curvas.

625.8 Pavimentação

Les pavimentos modernos de Madrid — *F. R. Lopez*

Revista de Obras Públicas, ano XCII. Jan. 1945, pág. 27.

A influência das características dos veículos nos modernos pavimentos.

626.1 : 711 Trabalhos fluviais

Obras de canalización y urbanización del Manzanares — *C. Mendoza.*

Revista de Obras Públicas, ano XCII, Janeiro 1945, pág. 97.

627 Correntes marítimas

A acção das correntes litorais nos portos marítimos — *P. Edgard Schultze.*

Técnica, n.º 152, pâg. 139.

Introdução, história, novos conhecimentos. Resumo. 19 figuras.

627.824.4 Barragens

Cálculo de muros de prêsa com contrafortes exteriores — *Eng. Manuel Salto.*

A Arqui: Port., n.º 171, Dez./Jan. 1945, pág. 221.

No refôrço de muros de retenção de águas é-se conduzido por vezes à solução dos contrafortes exteriores. Aplicação ao refôrço e ampliação de um muro de 3,m00 de altura. 9 fig. 4 quadros.

628.1 Abastecimento de água

El canal de Isabel II — *J. G. Augustin.*

Revista de Obras Públicas, Ano XCII, Janeiro 1945, pág. 14.

O abastecimento de águas a Madrid desde o sec. XVI.

628.2

Alcantarillado de Madrid — *J. P. Maroto.*

Revista de Obras Públicas, Ano XCII, Janeiro 1945, pág. 37.

A influência da técnica do Engenheiro na transformação dos serviços urbanos.

628,9 Iluminação

Noções gerais sôbre iluminação de interiores — *A. L. Monteiro.*

Boletim da Ordem dos Engenheiros, ano 2 (1944), n.º 12, Nov./Dez., pág. 410.

Fotometria, cálculo da iluminação produzida, a visão; organização dos projectos.

66.06 Indústria Química

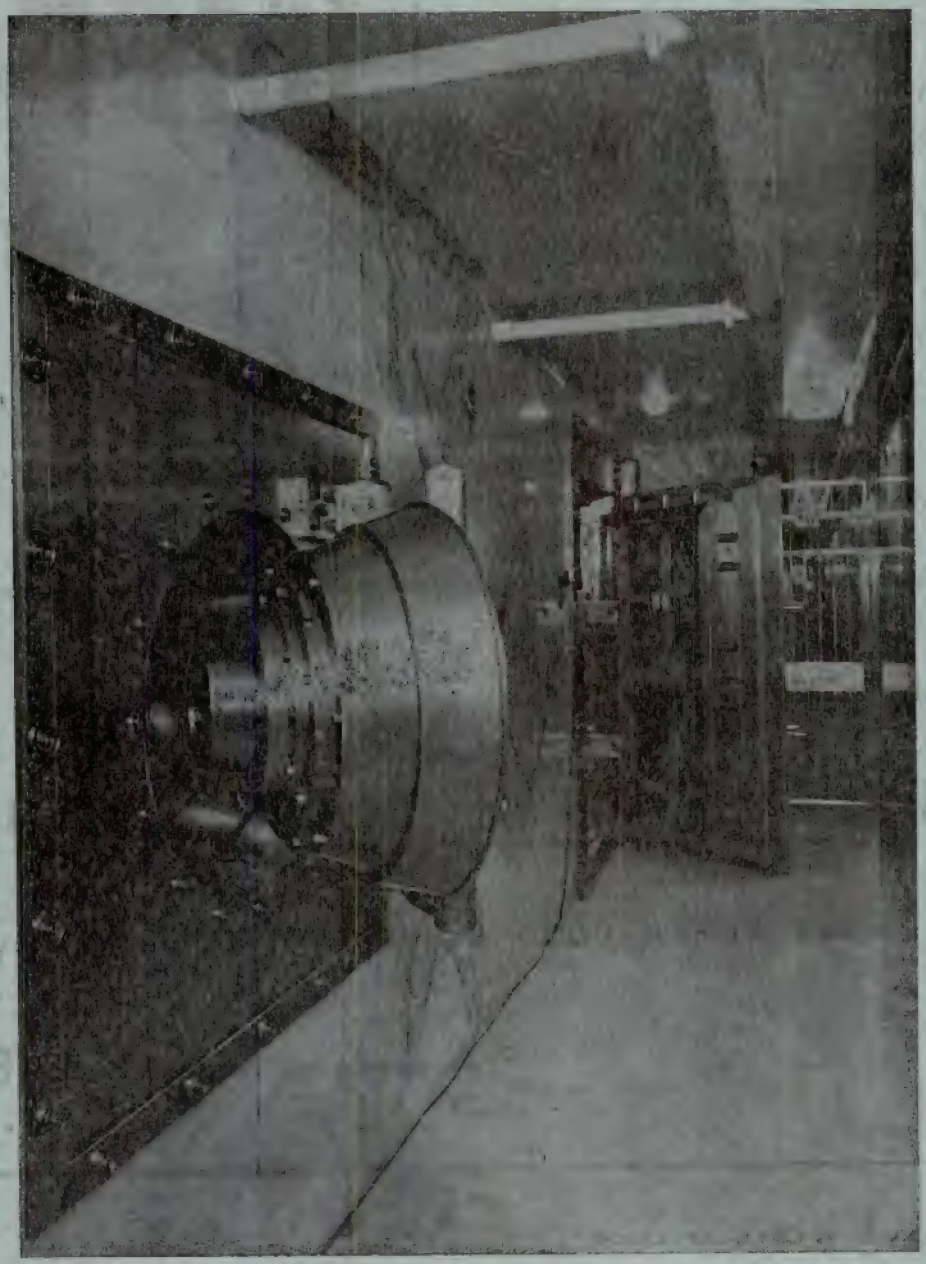
Separação entre sólidos e líquidos — *E. Madail.*

Boletim da Ordem dos Engenheiros, ano 2 (1944), n.º 12, Nov./Dez., pág. 393.

A decantação, centrifugação e a prensagem de líquidos com sólidos em suspensão.

Cofres e Casas Fortes

Fábrica Portugal



Corredor de CASA-FORTE com porta principal e porta de socorro

instalado no edifício da CASA DA MOEDA

Para impermeabilizar terraços, paredes, fundações, etc.

CONTRA A HUMIDADE

FABRICA EM SACAVÉM

TELEFONE 20879 TELEG. EPALDA—LISBOA

Nova edição do

REGULAMENTO DE BETÃO ARMADO

COM AS ALTERAÇÕES DO DECRETO N.º 33:021

À venda na Redacção da TÉCNICA

Nova edição das

Normas e Regulamentos para Instalações Eléctricas

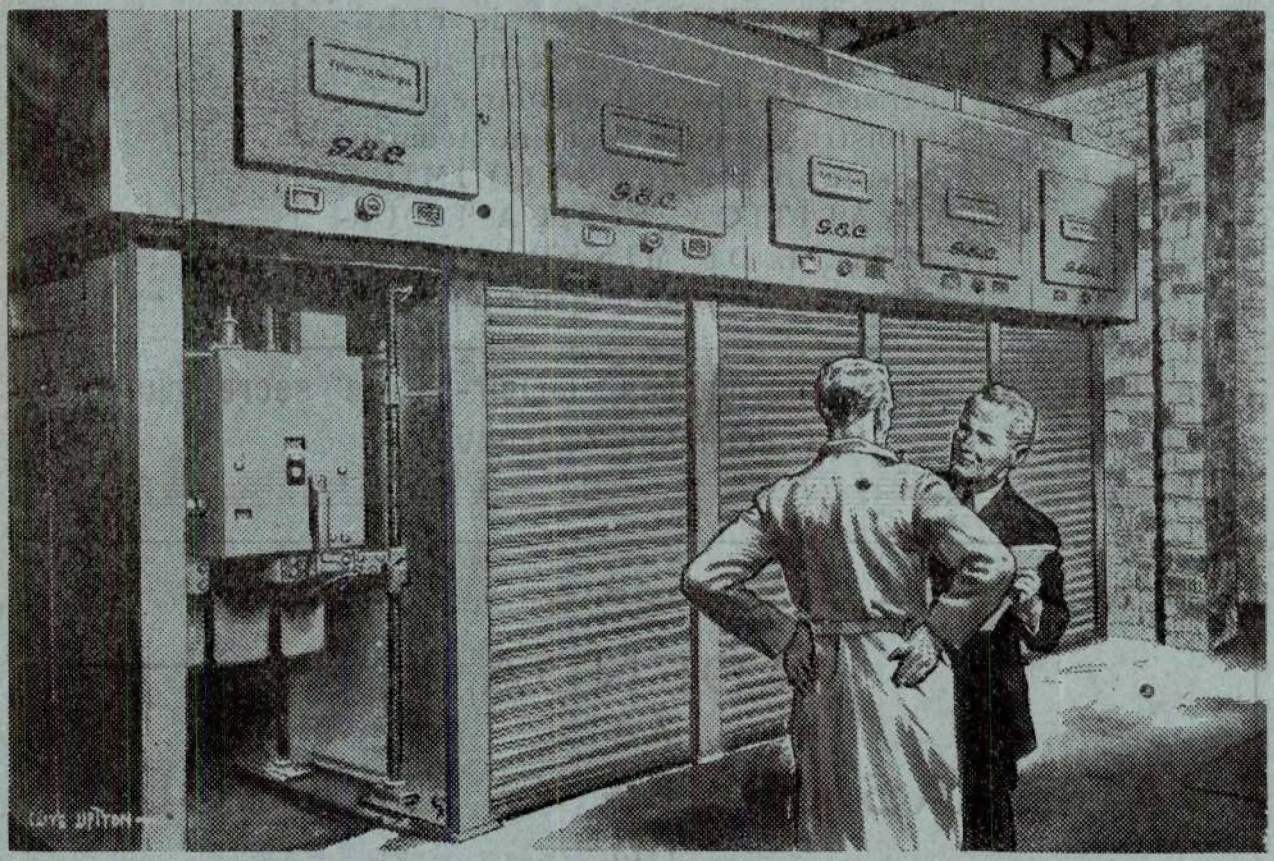
À venda na redacção da «Técnica»

G.E.C.

THE GENERAL ELECTRIC CO. LTD., OF ENGLAND

NA GUERRA COMO NA PAZ

À FRENTE DO PROGRESSO ELÉCTRICO



O desenvolvimento da aparelhagem de ligação e controle de distribuïção de energia eléctrica à indústria, é de importância fundamental.

A G. E. C., a maior organização Britânica de fabrico de material eléctrico no Império, tem desenhado e construído quadros de distribuïção da mais alta capacidade de ruptura necessária à prática moderna e que estão em serviço em tôda a parte do mundo.

As necessidades da guerra, especialmente para uma organização da importância da G. E. C., leva os seus recursos técnicos e de investigações científicas, juntamente com a sua vasta produção de material eléctrico a serem aplicados ùnicamente no esfôrço da guerra, em vez de serem canalizados para os fornecimentos normais.

Contudo, quando vier a paz, os grandes avanços técnicos efectuados pela G. E. C. durante estes anos de guerra estarão disponíveis para a reconstrução em tôda a parte do mundo.

ESQUEMAS DE ELECTRIFICAÇÃO

Os esquemas da electrificação da G. E. C., foram aplicados em tôdas as indústrias, como nas de Aviões, Automóveis, Locomotivas, Vagões e Carruagens dos Caminhos de Ferro, Mineira, Têxtil, Ferro, Aço, Cobre e Refinarias de óleo, etc., etc.

THE GENERAL ELECTRIC CO., LTD., MAGNET HOUSE, KINGSWAY, LONDON.

REPRESENTANTES:

THE ENGINEERING COMPANY OF PORTUGAL LTD

RUA DOS REMOLARES, 12-1.° — LISBOA

OFICINAS E LABORATÓRIOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

Acaba de ser publicada a

ADENDA ÀS TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

Pelo eng.º FERNANDO VASCO COSTA

Elaborada de modo a permitir a utilização das referidas tabelas tendo em conta as alterações introduzidas pelo decreto n.º 33:021 de 2 de Setembro de 1943 ao Regulamento do Betão Armado

A' venda na Redacção da "Técnica"

Preço das «TABELAS» ..... 35$00
Preço da «ADENDA» ..... 15$00

Desconto de 10 % aos assinantes

Emprêsa de Sondagens e Fundações

Teixeira Duarte, L.da

Sondagens geológicas

—

Consolidações do solo

—

Impermeabilização de rochas

—

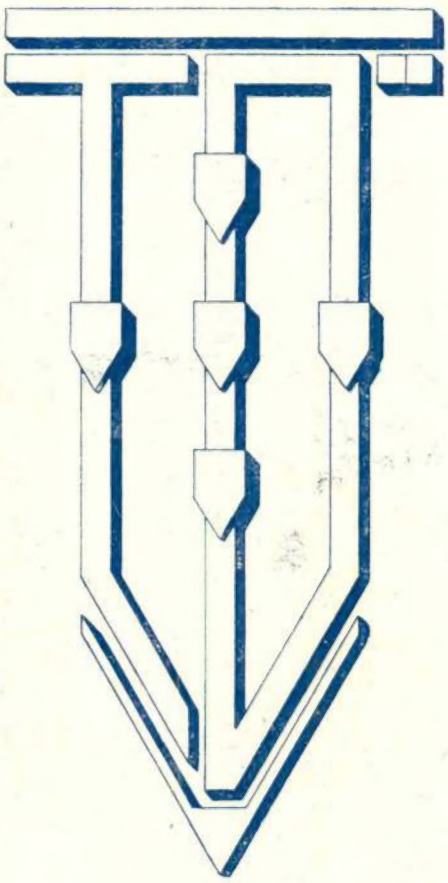
Poços artezianos

—

Rebaixamentos do nível freático

—

Captações de água subterrânea



Fundações de todos os géneros

—

Alicerces económicos

—

Estacas de todos os tipos

—

Consolidação de más fundações

—

Obras hidráulicas

—

Obras subterrâneas

Fundador e Director: **Eng. Ricardo E. Teixeira Duarte**

NOVA SEDE

LISBOA — RUA DA BETESGA, 57, 3.°

TELEFONE 2 3962

SOCIEDADE ANÓNIMA

BROWN, BOVERI & CIE.

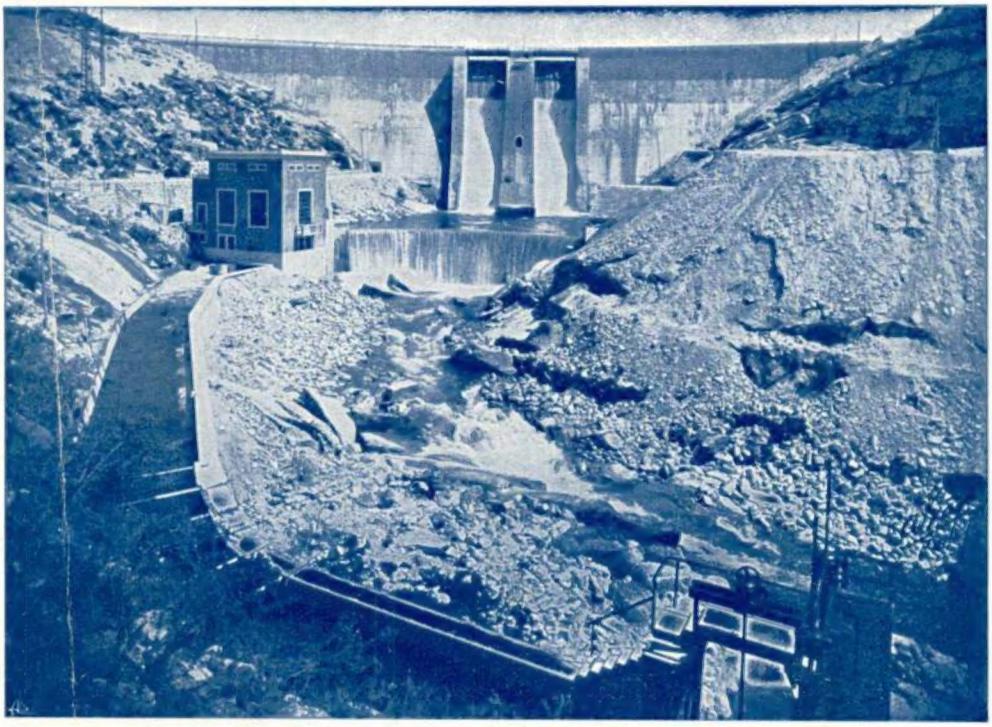
BADEN (SUISSA)

Representante geral para Portugal e Colónias:

EDOUARD DALPHIN

Escritório Técnico: Praça de D. João I, 25, 3.º Dir. // PORTO // Tel. 2411

Máquinas eléctricas, transformadores, mutadores, aparelhos para alta e baixa tensão. Montagem completa de centrais termo e hidro-eléctricas. Electrificação de fábricas e de caminho de ferro. Locomotivas, e auto-motoras eléctricas e Diesel-eléctricas. Máquinas de extracção. Turbinas a vapor. Geradores de vapor Velox. Máquinas frigoríficas. Grupos e transformadores para a soldadura pelo arco. Fornos eléctricos. Comandos eléctricos especiais para tôdas as máquinas utilizadas nas Fábricas de Fiação, Tecelagem, Acabamentos, Estamparia, Cimento, Moagem, etc.



Barragem do Ermal, da Companhia Electro-Hidráulica de Portugal, com 20 milhões de metros cúbicos de capacidade da albufeira. Na parte central, duas comportas automáticas, da casa construtora «Ateliers des Charmilles», de 9 × 5 metros, para a evacuação das cheias. Em baixo, a central automática de Guilhofrei (I) com uma turbina vertical tipo Kaplan (Ateliers des Charmilles) de 2750 cavalos e o canal de condução da água à central do Ermal (central II) com uma turbina vertical tipo Francis de 6250 cavalos (Ateliers des Charmilles) e duas horizontais (Escher-Wyss) de 500 e 1500 cavalos. Tôda a parte eléctrica (alternadores, transformadores, aparelhos de 2000 e 30000 Volts) da casa BROWN, BOVERI & Cie.